

質量比求面積(圓方之間)

摘要

利用一均勻紙張，割切圓、內接正方形後秤得質量，進而求得圓周率；並利用衛星地圖，在紙張上割切下地圖、比較圓，秤質量再計算得縣市、小島、建物等面積。人為的切割造成的影響很大，利用分析天平最小刻度比三樑天平小，則誤差率落差較小；當比較圓較大時，誤差率比較小。

壹、 研究動機

在自然課學到密度相同時，質量和體積成正比，數學學過圓周率和圓面積的關係，想如果一均勻紙張的密度、厚度應大致相等，因此想用另類的方法求得圓周率(方圓紙片質量比→體積比→面積比→圓周率)，並探討估計值和誤差。

紙質量比大約等於面積比，利用人造衛星的衛星地圖，推算縣市、小島、建物等面積；利用照片，推算各種物件面積或截面積。

貳、 研究目的

- 一、 不同半徑圓方的圓周率估計值和誤差
- 二、 同半徑圓方多次、多量平均值之差異
- 三、 衛星地圖求縣市面積
- 四、 衛星地圖求小島面積
- 五、 衛星地圖求校園建物面積和實測建物面積

參、 研究器材

- 一、 實驗室中的 310g/0.01g 三樑天平，具有微調式圓盤 HYN-OH310
- 二、 實驗室中的 220g/0.0001g 分析天平 220g/0.0001g Analytical Balance
【BSA224S-CW】
- 三、 圓切割器...等切割器具

- 四、 影印紙
- 五、 布尺
- 六、 紙箱(桌墊)

肆、 研究過程

一、 不同半徑圓方的圓周率估計值和誤差

- (一) 切割不同的圓和內接正方形。
- (二) 用三樑天平分別測量圓、方質量，記錄於表 1-1。
- (三) 用分析天平分別測量圓、方質量，並記錄於表 1-2。

二、 同半徑圓方多次、多量平均值之差異

- (一) 切割各 10 個相同的圓和內接正方形。
- (二) 用三樑天平 a 分別測量圓、方質量，記錄於表 2-1_a。
- (三) 用三樑天平 b 分別測量圓、方質量，記錄於表 2-1_b。
- (四) 用分析天平分別測量圓、方質量，並記錄於表 2-2。
(一次一個和直接一次測量十個相同的圓和內接正方形。)

三、 衛星地圖求縣市面積

- (一) 列印縣市不同比例尺的衛星地圖。
- (二) 下墊白紙沿邊切割下縣市地圖，依比例尺為半徑切割下圓。
- (三) 分別測量切割下白紙的質量，記錄於表 3-1。
- (四) 上網查縣市面積，記錄於表 3-1。

四、 衛星地圖求小島面積

- (一) 列印小島不同比例尺的衛星地圖。
- (二) 下墊白紙沿邊切割下島嶼地圖，依比例尺為半徑切割下圓。

(三) 分別測量切割下白紙的質量，記錄於表 4-1。

(四) 上網查小島面積，記錄於表 4-1。

五、 衛星地圖求校園建物面積和實測建物面積

(一) 列印校園建物不同比例尺的衛星地圖。

(二) 下墊白紙沿邊切割下建物地圖，依比例尺為半徑切割下圓。

(三) 分別測量切割下白紙的質量，記錄於表 5-1。

(四) 另於衛星地圖上按測量距離可得一個較大比例刻度線。

(五) 利用測量距離的線段，同時將建物框出。

(六) 同 2.沿框線割下建物地圖，依隨地圖放大的長度線為半徑切割下圓。

(七) 分別測量切割下白紙的質量，記錄於表 5-1。

(八) 用布尺測量校園建物邊長計算面積，記錄於表 5-1。

伍、 研究結果

一、 不同半徑圓方的估計值和誤差

表 1-1

半徑	2	3	4	5	6	8	10	12	14	平均
M _圓	0.27	0.58	0.88	1.31	1.89	3.26	5.10	7.33	10.90	
M _方	0.15	0.32	0.54	0.83	1.29	2.04	3.24	4.51	6.30	
π _測	3.6000	3.6250	3.2593	3.1566	2.9302	3.1961	3.1481	3.2506	3.4603	3.2918
Δ	14.5916	15.3873	3.7454	0.4785	-6.7278	1.7343	0.2087	3.4684	10.1453	4.7813

表 1-2

半徑	2	3	4	5	6	8	10	12	14	平均
M _圓	0.1969	0.4588	0.8104	1.2697	1.8129	3.2287	5.05517	7.2646	9.9462	
M _方	0.1245	0.2956	0.5343	0.8261	1.1798	2.0502	3.2302	4.6166	6.2812	
π _測	3.1631	3.1042	3.0335	3.0740	3.0732	3.1496	3.1299	3.1472	3.1670	3.1157
Δ	0.6831	-1.1904	-3.4406	-2.1528	-2.1760	0.2563	-0.3708	0.1774	0.8079	-0.8229

(M:質量(g)、π:圓周率、Δ:誤差率、π=3.141592653)

(一) 利用圓方紙片質量比 $\xrightarrow{\text{同密度}}$ 體積比 $\xrightarrow{\text{同厚度}}$ 面積比 \rightarrow 圓周率

$$(M_{\text{圓}} / M_{\text{方}} = V_{\text{圓}} / V_{\text{方}} = A_{\text{圓}} / A_{\text{方}} = \pi_{\text{測}} * R^2 / 2 * R^2 = \pi_{\text{測}} / 2)$$

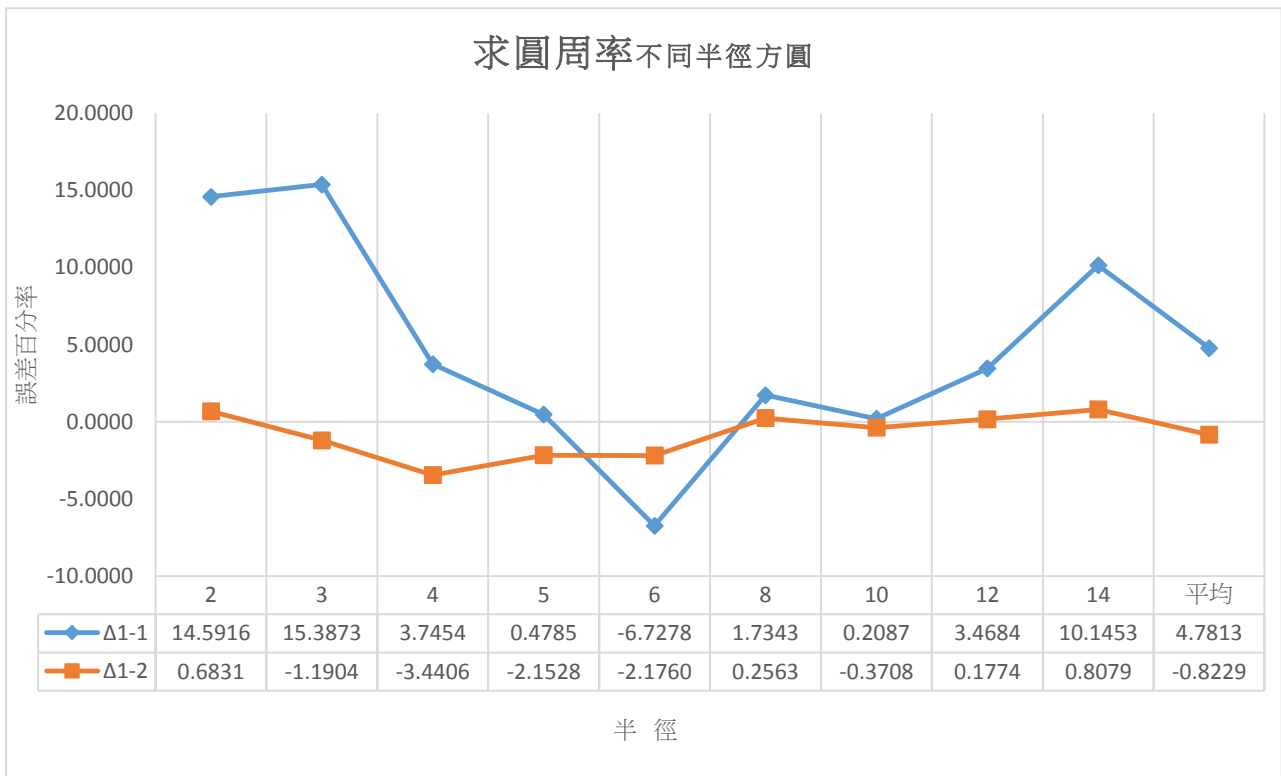
$$\pi_{\text{測}} / 2 = M_{\text{圓}} / M_{\text{方}} \rightarrow \pi_{\text{測}} = 2 * M_{\text{圓}} / M_{\text{方}}$$

(二) 不同半徑大小測量的估計值和誤差百分率

$$\Delta = (\pi_{\text{測}} - \pi) / \pi * 100\%$$

(三) 不同儀器誤差率

△1-1: 三樑天平誤差率 △1-2:分析天平誤差率



二、 同半徑圓方多次、多量平均值之差異

表 2-1_a

編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	十次 平均	一次 10 個
M _圓	2.50	2.54	2.56	2.54	2.46	2.58	2.53	2.52	2.44	2.58	2.53	24.95
M _方	1.57	1.63	1.64	1.62	1.54	1.54	1.50	1.61	1.54	1.56	1.58	15.60
π _測	3.1847	3.1166	3.1220	3.1358	3.1948	3.3506	3.3733	3.1304	3.1688	3.3077	3.2063	3.1987
Δ	1.3726	-0.7967	-0.6252	-0.1843	1.6938	6.6545	7.3765	-0.3552	0.8670	5.2871	2.0613	1.8184

表 2-1_b

編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	十次 平均	一次 10 個
M _圓	2.52	2.53	2.41	2.55	2.41	2.41	2.44	2.58	2.45	2.45	2.48	24.94
M _方	1.68	1.63	1.56	1.55	1.54	1.56	1.53	1.61	1.54	1.54	1.57	15.83
π _測	3.0000	3.1043	3.0897	3.2903	3.1299	3.0897	3.1895	3.2050	3.1818	3.1818	3.1449	3.1510
Δ	-4.5070	-1.1872	-1.6504	4.7342	-0.3731	-1.6504	1.5263	2.0173	1.2804	1.2804	0.1038	0.2988

表 2-2

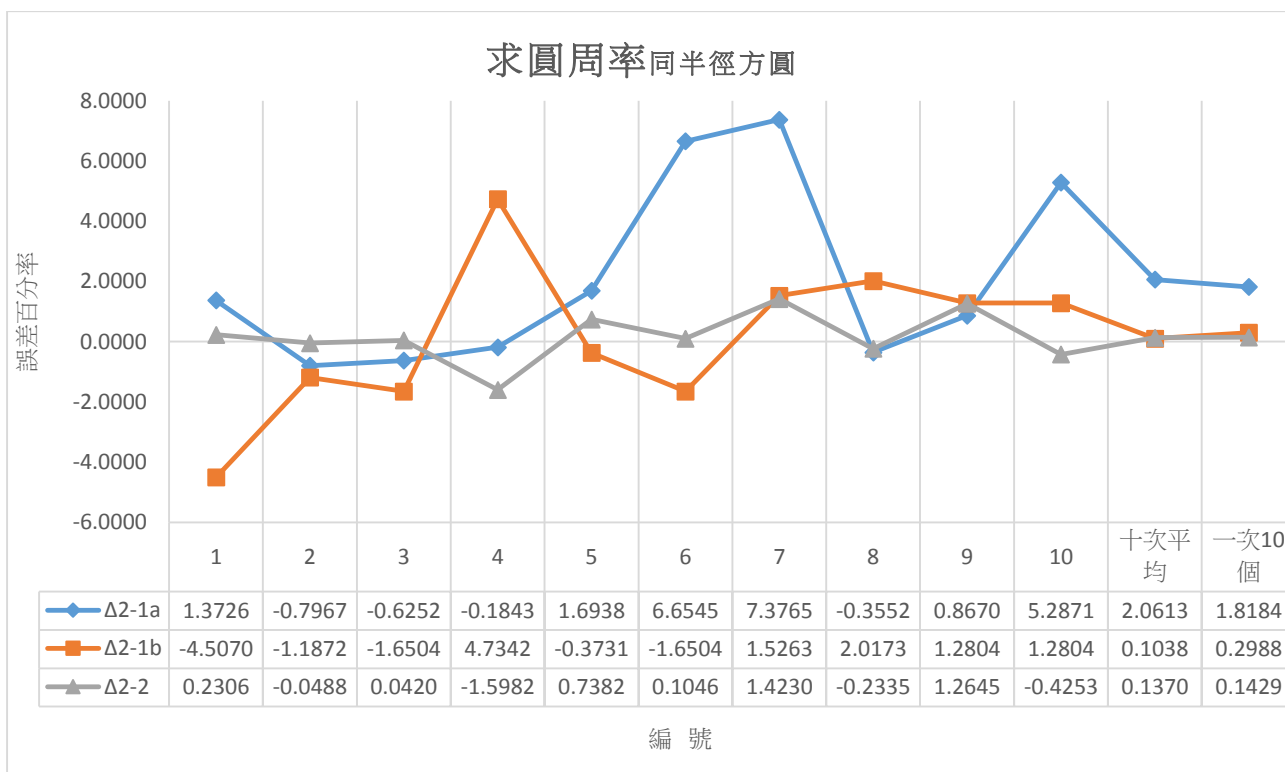
編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	十次 平均	一次 10 個
M _圓	2.4827	2.4852	2.4895	2.5541	2.5092	2.5126	2.4697	2.5096	2.4792	2.4871	2.4979	24.9714
M _方	1.5769	1.5829	1.5842	1.6524	1.5857	1.5979	1.5502	1.6014	1.5586	1.5901	1.5880	15.8746
π _測	3.1488	3.1401	3.1429	3.0914	3.1648	3.1449	3.1863	3.1343	3.1813	3.1282	3.1459	3.1461
Δ	0.2306	-0.0488	0.0420	-1.5982	0.7382	0.1046	1.4230	-0.2335	1.2645	-0.4253	0.1370	0.1429

(M:質量(g)、 π :圓周率、 Δ :誤差率、 $\pi=3.141592653$)

(一) 利用圓方紙片質量比 $\xrightarrow{\text{同密度}}$ 體積比 $\xrightarrow{\text{同厚度}}$ 面積比 \rightarrow 圓周率

(二) 不同儀器多次、多量平均值誤差率

△2-1a:三樑天平 a △2-1b:三樑天平 b △2-2:分析天平



三、 衛星地圖求縣市面積

表 3-1 嘉義縣市

比例尺	20km	10km	5km		2km	2km 大
M 嘉縣	0.133	0.5421	2.1612			
M 嘉市	0.0037	0.0158	0.0654		0.2639	1.0806
M 圖比	0.0892	0.0931	0.0950		0.0627	0.2323
A 圖比	1256.6371	314.1593	78.5398		12.5664	12.5664
A 縣算	1873.6853	1829.2775	1786.7395			
A 市算	52.1251	53.3160	54.0685		52.8910	58.4555
A 縣資	1,903.6367	1,903.6367	1,903.6367		1,903.6367	1,903.6367
A 市資	60.0256	60.0256	60.0256		60.0256	60.0256
△ 縣算	-1.5734	-3.9062	-6.1407			
△ 市算	-13.1619	-11.1780	-9.9243		-11.8859	-2.6157

(M:質量(g)、A:面積(km²)、△:誤差率、 $\pi=3.141592653$)

(一) 利用紙片質量比 $\xrightarrow{\text{同密度}}$ 體積比 $\xrightarrow{\text{同厚度}}$ 面積比

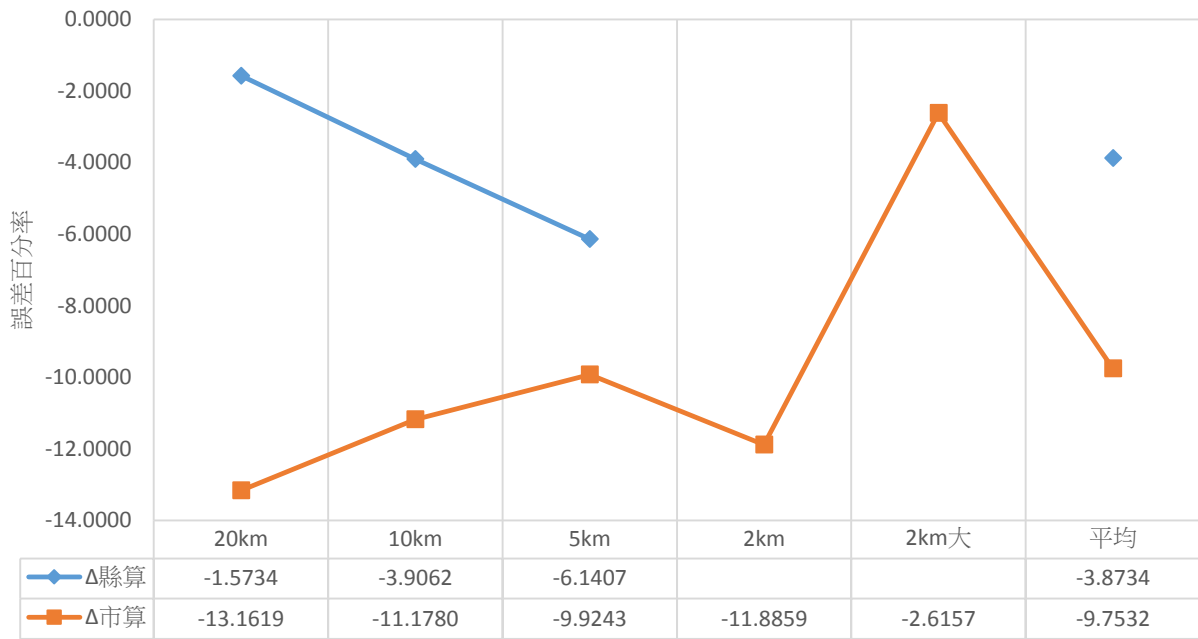
$$A_{\text{算}} = A_{\text{對比}} * M_{\text{地圖}} / M_{\text{對比}}$$

(二) 縣市面積推算值和網資值的誤差率

$$\Delta = (A_{\text{算}} - A_{\text{資}}) / A_{\text{資}} * 100\%$$

△縣算: 嘉義縣誤差率 △市算: 嘉義市誤差率

縣 市



比例尺

四、衛星地圖求小島面積

表 4-1

小島	比例尺	2km	1km	0.5km
龜山島	M _{地圖}		0.1893	0.7381
	M _{圖比}		0.2300	0.2300
	A _{圖比}		3.1416	0.7854
	A _算		2.5857	2.5204
	A _{網資}		2.8410	2.8410
	△ _算		-8.9874	-11.2832
小琉球	M _{地圖}		0.4873	1.9839
	M _{圖比}		0.2368	0.2375
	A _{圖比}		3.1416	0.7854
	A _算		6.4649	6.5606
	A _{網資}		6.8020	6.8020
	△ _算		-4.9553	-3.5484
蘭嶼	M _{地圖}	0.8137	3.2446	
	M _{圖比}	0.2339	0.2407	
	A _{圖比}	12.5664	3.1416	
	A _算	43.7164	42.3482	
	A _{網資}	48.3892	48.3892	
	△ _算	-9.6568	-12.4842	

(M:質量(g)、A:面積 km²)、△:誤差率、 $\pi = 3.141592653$)

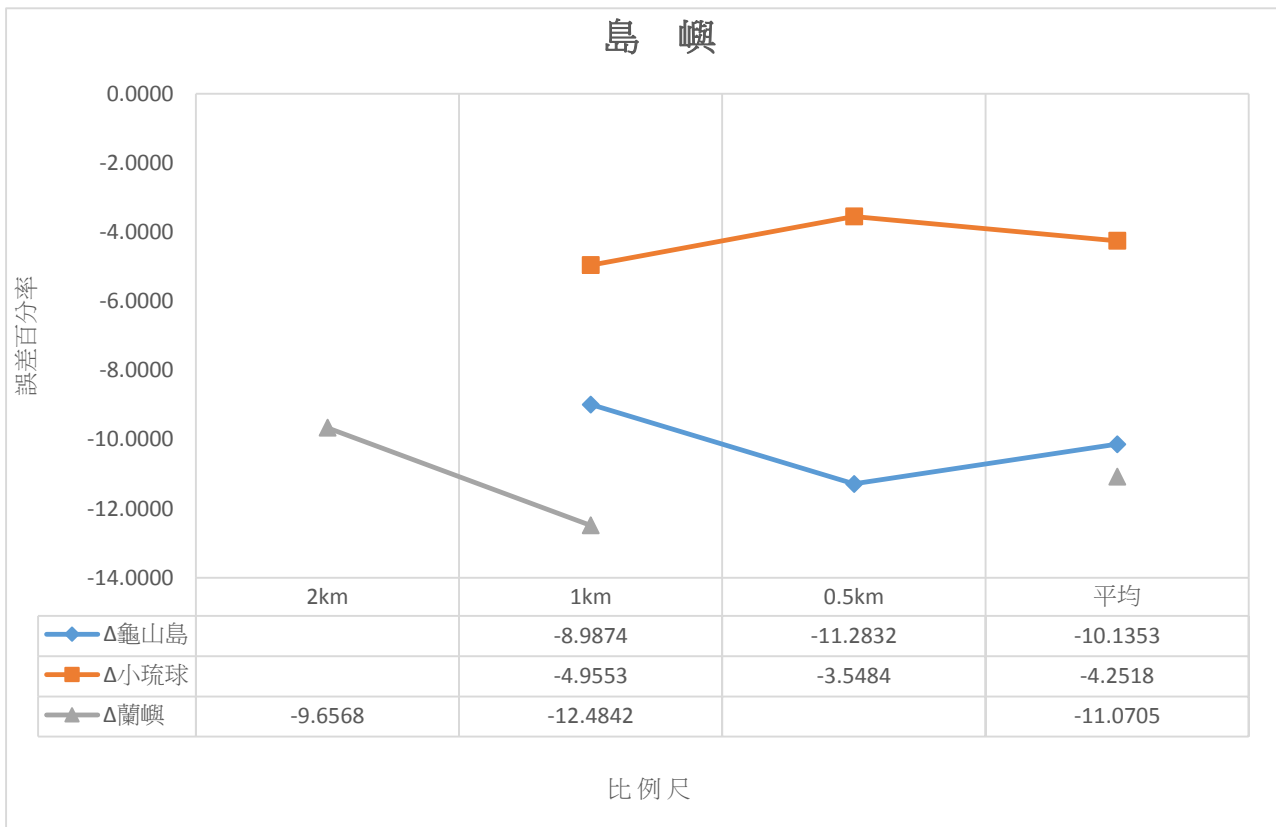
(一) 利用紙片質量比 $\xrightarrow{\text{同密度}}$ 體積比 $\xrightarrow{\text{同厚度}}$ 面積比

$$A_{\text{算}} = A_{\text{對比}} * M_{\text{地圖}} / M_{\text{對比}}$$

(二) 小島面積推算值和網資值的誤差率

$$\Delta = (A_{\text{算}} - A_{\text{資}}) / A_{\text{資}} * 100\%$$

△龜山島誤差率 △小琉球誤差率 △蘭嶼誤差率



五、衛星地圖求校園建物面積和實測建物面積

表 5-1

建物	衛星圖 比例尺 比例尺 圓半徑	原小比例圓				隨地圖放大比較圓		
		20m	10m	5m		20m	10m	5m
		20m	10m	5m		20m	20m	20m
竹 中 上 球 場	M _{地圖}	0.1110	0.5022	1.9643		0.2719	1.0796	4.2677
	M _圓	0.0997	0.1046	0.0980		0.2117	0.7883	3.2345
	A _{圓比}	1256.6371	314.1593	78.5398		1256.6371	1256.6371	1256.6371
	A _{圓算}	1399.0643	1508.3249	1574.2425		1613.9802	1721.0014	1658.0461
	A _{實測}	1656.0592	1656.0592	1656.0592		1656.0592	1656.0592	1656.0592
	△ _{圓算}	-15.5185	-8.9208	-4.9404		-2.5409	3.9215	0.1200
	寬: 31.27 m 長: 52.96 m		面積: 1656.0592 m ²					
竹 中 下 球 場	M _{地圖}	0.0966	0.3619	1.4284		0.2165	0.8446	3.3033
	M _圓	0.0997	0.1046	0.0943		0.2117	0.7883	3.2345
	A _{圓比}	1256.6371	314.1593	78.5398		1256.6371	1256.6371	1256.6371
	A _{圓算}	1217.5641	1086.9430	1189.6742		1285.1295	1346.3855	1283.3666
	A _{實測}	1301.2965	1301.2965	1301.2965		1301.2965	1301.2965	1301.2965
	△ _{圓算}	-6.4345	-16.4723	-8.5778		-1.2424	3.4649	-1.3779
	寬: 38.15 m 長: 34.11 m		面積: 1301.2965 m ²					

(M:質量(g)、A:面積(m²)、△:誤差率、π=3.141592653)

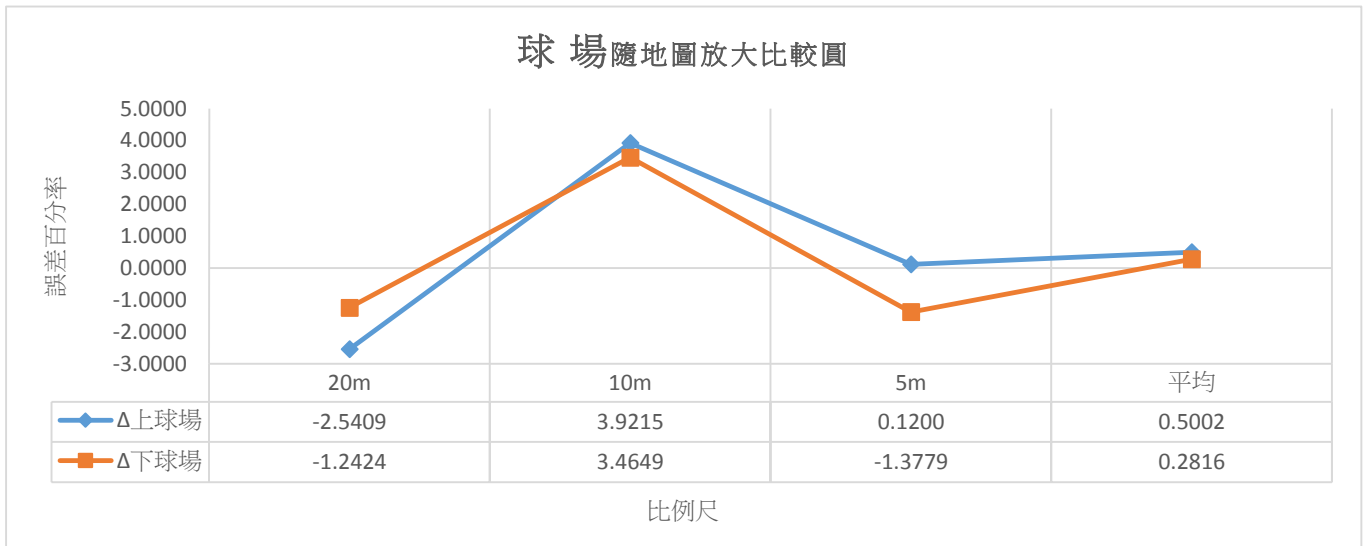
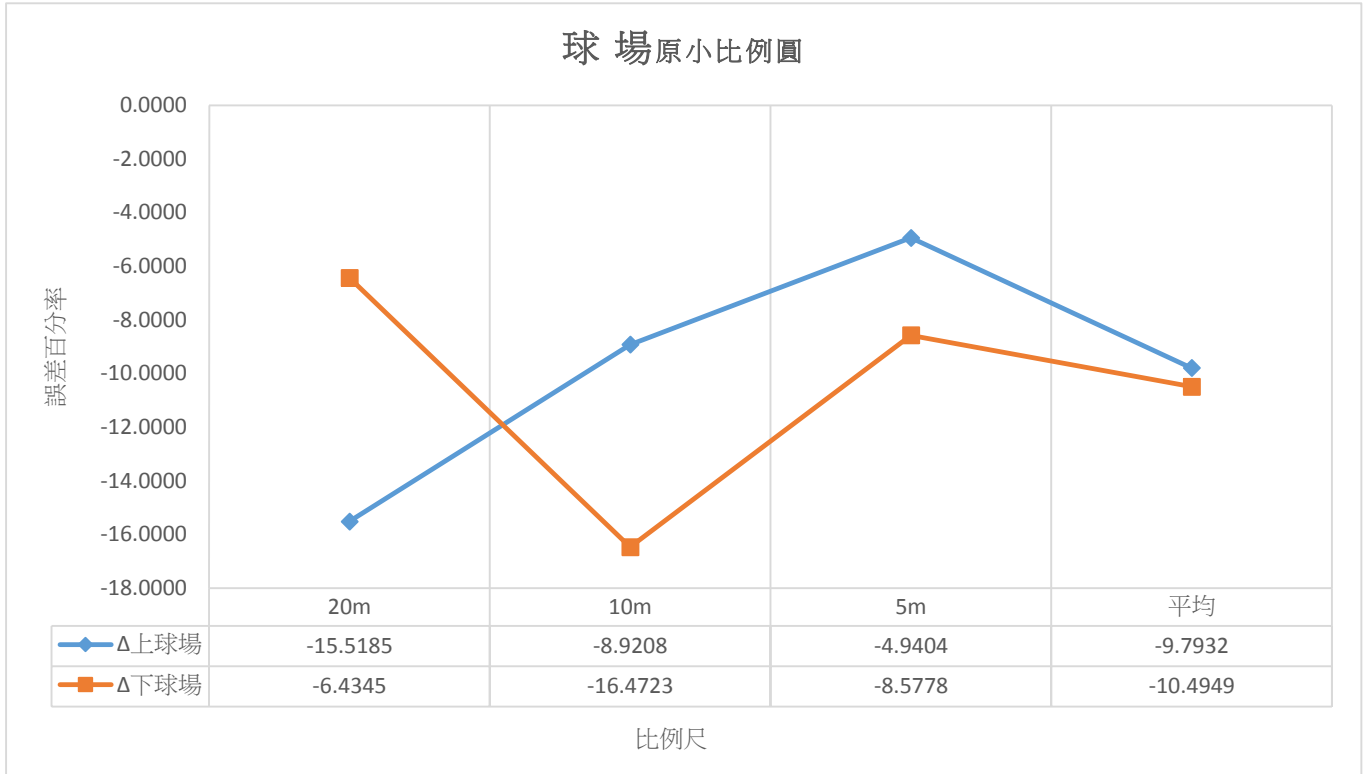
(一) 利用紙片質量比 $\xrightarrow{\text{同密度}}$ 體積比 $\xrightarrow{\text{同厚度}}$ 面積比

$$A_{\text{算}} = A_{\text{對比}} * M_{\text{地圖}} / M_{\text{對比}}$$

(二) 建物面積推算值和實測值的誤差率

$$\Delta = (A_{\text{算}} - A_{\text{實}}) / A_{\text{實}} * 100\%$$

△上球場誤差率 △下球場誤差率



陸、 討論

一、 不同半徑圓方的圓周率估計值和誤差

- (一) 三樑天平，得不同半徑的誤差率落差大，平均誤差率也較大，可能因三樑天平須估計值，且儀器最小刻度較大。
- (二) 分析天平，得不同半徑的誤差率落差小，平均誤差率也較小，可能因分析天平無須估計值，且儀器最小刻度較小。
- (三) 不同半徑的誤差率和半徑大小幾乎無相關，可能因人為的切割偏差影響，造成此結果。

二、 同半徑圓方多次、多量平均值之差異

- (一) 三樑天平的誤差率通常大於分析天平，平均誤差率也較大，可能因三樑天平須估計值，且儀器最小刻度較大。
- (二) 十次平均和一次 10 個的誤差率相差不多，主因可能來自圓方的切割時的偏差。
- (三) 分析天平誤差率較小，因此之後的質量測量皆使用分析天平。

三、 衛星地圖求縣市面積

- (一) 同一縣市之中較大衛星地圖算出的誤差率沒有較小，可能割切的比較圓形，它的真實切割半徑沒有同時增大。
- (二) 同一比例尺之中嘉義縣的誤差率均小於嘉義市，可能因嘉義縣面積大於嘉義市。
- (三) 嘉義市之中在放大 2km 的誤差率最小，可能因割切的比較圓形，它的真實切割半徑也同時放大為 2 倍，真實面積放大成 4 倍，切割偏差的影響因此而變小。

四、 衛星地圖求小島面積

- (一) 島嶼和縣市算出的誤差率皆為負值，估算出的面積偏小，可能是割切比較圓形時，割切的半徑略大於實際比例尺真正的長度，使得比較圓形的質量(分母)較大。
- (二) 小比較圓形的割切位置，略大或略小影響結果甚大。
- (三) 各島嶼地圖的大小對誤差率影響不大，可能是割切的比較圓形，它的真實切割半徑也沒有同時放大。

五、 衛星地圖求校園建物面積和實測建物面積

- (一) 用原比例尺的長為半徑割切下比較圓，此圓較小易因為切割時，如果略大則估算面積偏小，使誤差率呈負值，且造成較大偏差。
- (二) 改用隨地圖同步放大的線段做為比較圓的半徑，此時圓針時切割半徑較大，因此切割造成的誤差較小，使得估算出的球場面積誤差率較小。
- (三) 在改用隨地圖放大比較圓和地圖有框線框出的實驗中，各比例尺上、下球場的誤差率相差不多，因割切時有框線可依循，且在同一張大白紙割切上、下球場地圖和比較圓，使得因切割而造成的偏差呈現同步。

柒、結論

一、 根據我們的實驗結果和參考資料，有以下數點結論：

- (一) 三樑式天平最小刻度較大，而誤差率落差較大。
- (二) 分析天平最小刻度較小，其誤差率落差較小，且平均誤差率通常也較小。
- (三) 人為的割切誤差，造成的影響甚大。
- (四) 割切小半徑比較圓時，若切割略大一些，就會造成地圖面積的估算結果偏小，使誤差率呈現負值。
- (五) 用同步放大的線段當半徑，可切割下較大的比較圓，則造成誤差率較小。
- (六) 若用框線框出地圖，依比例尺放大地圖和比較圓半徑，則切割一致性較佳，使不同球場誤差率趨於一致。

二、應用與未來：

- (一) 衛星地圖的實驗，以已知面積資料的地圖進行推算，進而應用於推算未知面積地圖的面積。
- (二) 衛星建物地圖的實驗，以有規則形狀建物進行推算，進而應用於推算不規則形狀建物的面積或截面積。
- (三) 利用網路上的衛星建物地圖推算得到面積，進而估算塗覆其表面所需材料的多

寡。

(四) 日後可利用照片，先以有規則物件的照片推算，進而應用於不規則形狀物件面積或截面積的推算。

捌、參考資料

一、 國民中學自然與生活科技二上(南一出版社)

二、 來自牛頓的寶石---微積分 圓面積與圓周率

http://calculus.nctu.edu.tw/upload/calculus_web/maple/Site/lecture/calculus/03.htm

三、 圓周率 - 維基百科，自由的百科全書

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%9C%93%E5%91%A8%E7%8E%87>

四、 臺灣行政區劃 - 維基百科，自由的百科全書

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%87%BA%E7%81%A3%E8%A1%8C%E6%94%BF%E5%8D%80%E5%8A%83>

五、 Wikimedia Commons 維基百科

<https://commons.wikimedia.org/wiki/%E9%A6%96%E9%A0%81?uselang=zh-tw>

六、 Google 地圖

<https://www.google.com.tw/maps/@23.5215191,120.555309,15z?hl=zh-TW>