

終 端 速 度

壹、研究動機：

雲、霧漂浮於空中，而雨卻快速落下，之間的差異值得探討。

貳、研究目的：

利用大小不同的球型保麗龍，由高處自由落下，測出其終端速度，再進而討論出終端速度與球的直徑、球的密度之關係。

參、研究器材及設備：

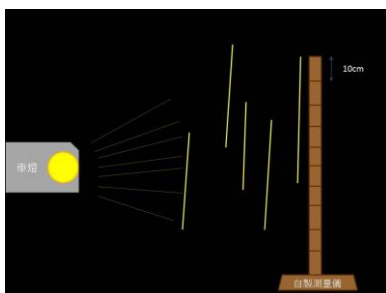
- 一、單眼數位相機
- 二、一公尺長木尺(每 10 公分為一單位)。(如下圖)
- 三、1.1 公尺長的紙尺(每 10 公分為一單位)
- 四、電子秤
- 五、游標尺
- 六、30 公分的鋼尺(mm)
- 七、大小不同直徑的保麗龍球(7 種)(見下表)

<表(一)>

號碼	1	2	3	4	5	6	7
質量 (g)	31.86	10.04	5.19	2.89	1.445	0.342	0.111
直徑 (cm)	14.69	9.96	7.65	5.70	4.89	2.83	1.82
體積 (cm ³)	1659.83	517.34	234.41	96.97	61.22	11.87	3.16
密度 (g/cm ³)	0.0192	0.0194	0.0221	0.0298	0.0236	0.0288	0.0352

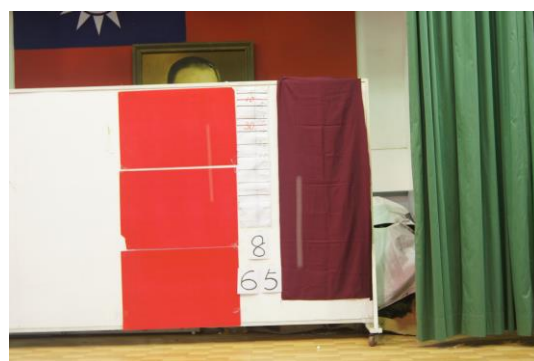
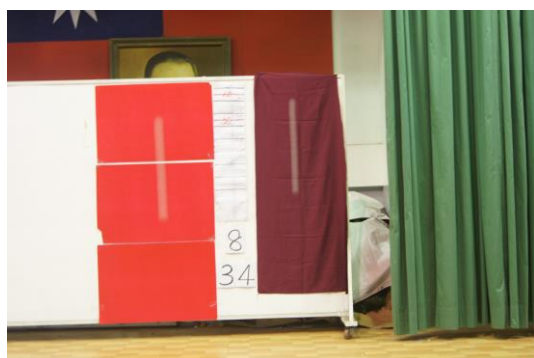
肆、研究步驟

- 一、雨滴的終端速度測量：
 - (一) 把自製的長度測量尺放置於大雨中。
 - (二) 利用汽車車燈照明可明顯看到雨滴落下的線條。
 - (三) 在自製的長度測量尺旁放置預定的快門，如(30、40、60)等三角紙牌。
 - (四) 配合快門牌的數字，調整單眼相機的快門與紙牌一致後，按下快門拍攝雨滴落下的路徑。
 - (五) 依快門 1/30 秒、1/40 秒、1/60 秒重覆拍攝數張。
 - (六) 比對照片中雨滴的路徑長與長度測量尺的刻度，即可測出在該快門之下的雨滴瞬時速率。



二、大小不同半徑的保麗龍球終端速度之測量：

- (一)在大禮堂內，利用高約 9 公尺的佈置台為投射點。
- (二)背景看板上張貼紅色布或色紙，並且貼上每 10 公分為一單位的紙尺 1.2 公尺長，作為測量長度的對照。
- (三)單眼相機快門調為 1/15 秒時，把 1 號保麗龍球到 7 號保麗龍球，分別讓其自由落下。當球落在有紅色背景之看板前時，迅速按下快門拍攝之。
- (四)單眼相機快門調為 1/8 秒時，重複 3 之步驟。
- (五)在照片中由保麗龍球在紅色背景中拉出的白色路徑長配合快門時間，即可求出其終端速度。



伍、研究結果：

(一)雨滴終端速度之測量值

<表(二)>

密度 (g/cm ³)	快門 (秒)	螢幕上 測量距離 (cm)	螢幕上 測量距離 平均 (cm)	實際落下 距離平均值 (cm)	終端速度 (m/s)	終端速度 平均值 (m/s)
1.0	1/60	9.09	8.45	10.7	6.404	6.308
		8.14				
		8.13				
1.0	1/40	12.72	12.04	16.1	6.429	
		11.83				
		11.56				
1.0	1/30	14.08	13.11	20.3	6.090	
		12.79				
		12.46				

(二)保麗龍球之終端速度測量值

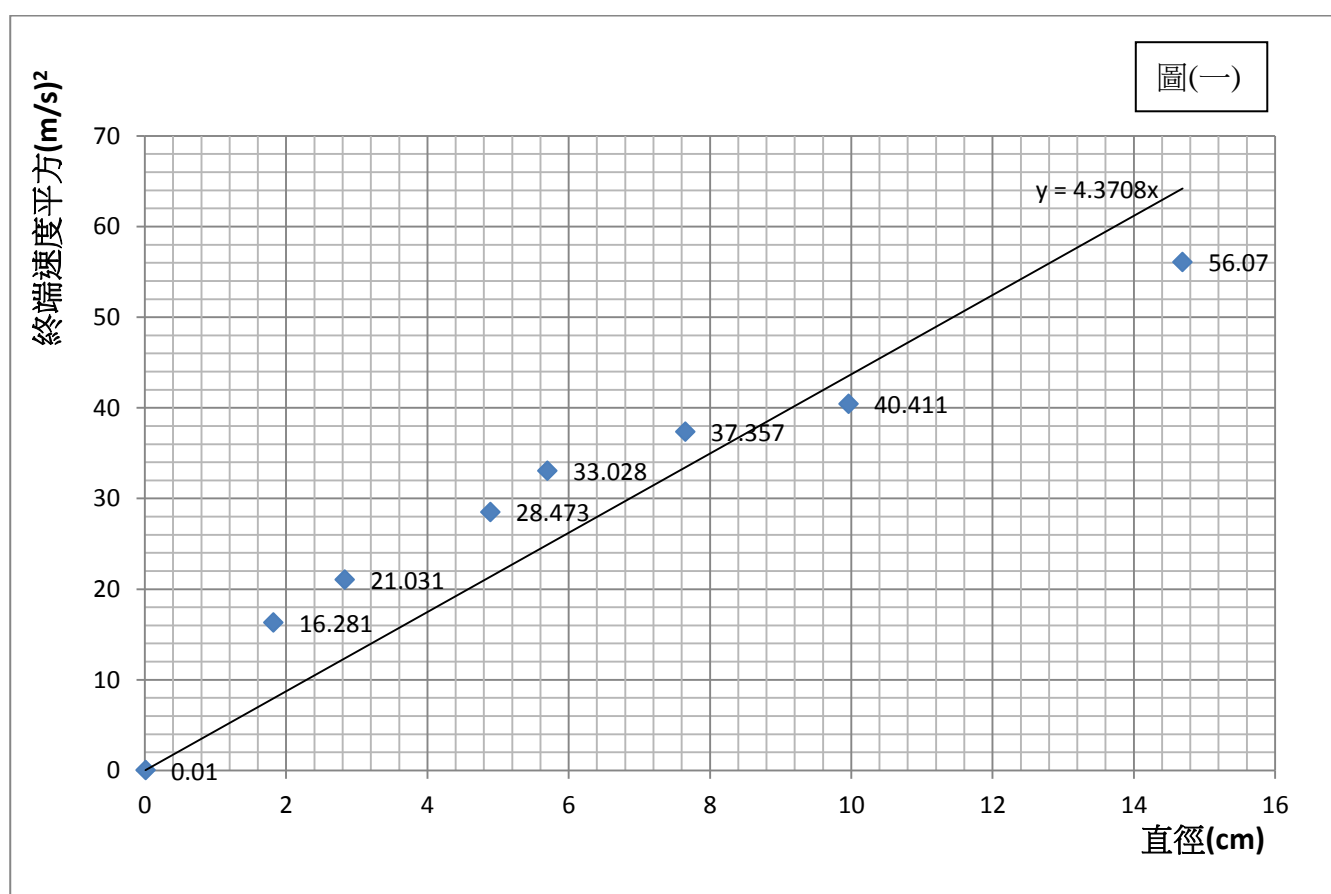
<表(三)>

球編號	重量(g)	直徑(mm)	密度(g/cm ³)	快門(秒)	螢幕上測量距離(cm)	螢幕上測量距離平均值(cm)	實際落下距離平均值(cm)	終端速度(m/s)
1	31.86	14.69	0.0192	1/15	4.35	4.33	47.17	7.070
					4.25			
					4.40			
				1/8	8.55	8.60	93.61	
					8.60			
					8.65			
2	10.04	9.96	0.0194	1/15	3.85	3.80	41.36	6.200
					3.80			
					3.75			
				1/8	7.25	7.30	79.46	
					7.30			
					7.35			
3	5.19	7.65	0.0221	1/15	3.78	3.79	41.29	6.193
					3.75			
					3.85			
				1/8	7.00	7.02	76.41	
					7.05			
					7.00			
4	2.89	5.7	0.0298	1/15	3.45	3.52	38.28	5.740
					3.50			
					3.60			
				1/8	6.55	6.60	71.84	
					6.60			
					6.65			
5	1.445	4.89	0.0236	1/15	3.15	3.07	33.38	5.010
					3.00			
					3.05			
				1/8	6.15	6.13	66.72	
					6.10			
					6.15			
6	0.342	2.83	0.0288	1/15	2.75	2.60	28.30	4.240
					2.5			
					2.55			

6	0.342	2.83	0.0288	1/8	5.25	5.27	57.32	4.586
					5.25			
					5.30			
7	0.111	1.82	0.0352	1/15	2.25	2.25	24.49	3.670
					2.15			
					2.35			
				1/8	4.55	4.63	50.43	4.035
					4.65			
					4.70			

<表(四)>

號碼	1	2	3	4	5	6	7
直徑(cm)	14.69	9.96	7.65	5.70	4.89	2.83	1.82
平均速度(m/s)	7.488	6.357	6.112	5.747	5.336	4.586	4.035
速度平方(m/s) ²	56.070	40.411	37.357	33.028	28.473	21.031	16.281

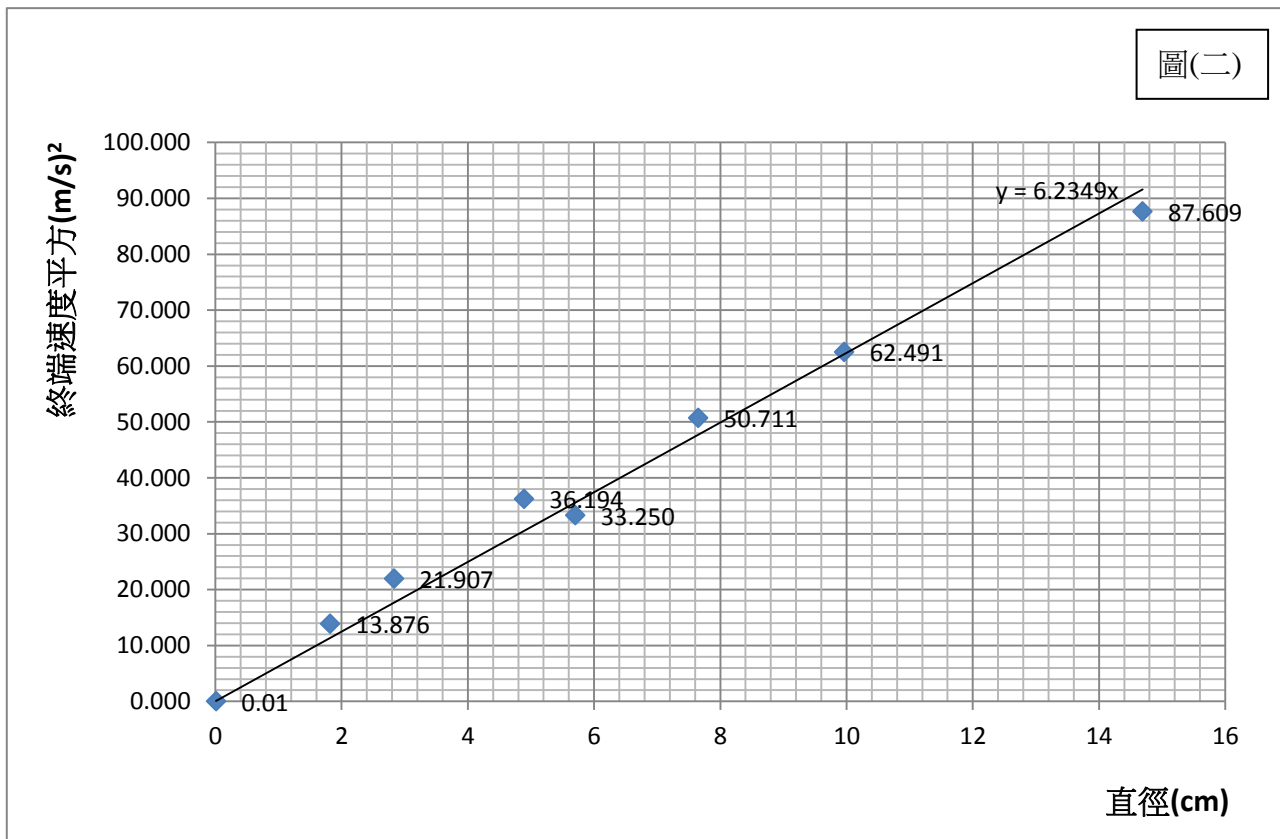


(三) 假設終端速度之平方和密度成正比時，保麗龍球之密度皆為 0.030 g/ml。此時終端速度見下表

<表(五)>

	號碼	1	2	3	4	5	6	7
a	直徑(cm)	14.69	9.96	7.65	5.7	4.89	2.83	1.82
b	密度(g/cm ³)	0.0192	0.0194	0.0221	0.0298	0.0236	0.0288	0.0352
c	速度平方(m/s) ²	56.070	40.411	37.357	33.028	28.473	21.031	16.281
d	速度平方(m/s) ² (密度變為0.030 g/ml)	87.609	62.491	50.711	33.250	36.194	21.907	13.876

$$\text{公式: } d = \frac{0.030}{b} \times c$$



陸、討論：

一、由表(二) 將快門 1/30.1/40.1/60 秒的雨滴照片在螢幕上測得的落下長度換算成實際落下的距離。

(一) 快門 1/30 秒，螢幕上測的 6.5 公分為實際的 10 公分

$$\frac{10}{6.5} = \frac{x}{13.11} \quad x \doteq 20.3\text{cm} \quad 20.3\text{cm} \div \frac{1}{30}\text{秒} = 6.090\text{m/s}$$

(二) 快門 1/40 秒，螢幕上測的 7.5 公分為實際的 10 公分

$$\frac{10}{7.5} = \frac{x}{12.04} \quad x \doteq 16.1\text{cm} \quad 16.1\text{cm} \div \frac{1}{40}\text{秒} = 6.429\text{m/s}$$

(三) 快門 1/60 秒，螢幕上測的 7.5 公分為實際的 10 公分

$$\frac{10}{7.9} = \frac{x}{8.45} \quad x \doteq 10.7\text{cm} \quad 10.7\text{cm} \div \frac{1}{60}\text{秒} = 6.404\text{m/s}$$

二、由表(三)將 1-7 號保麗龍球在螢幕上測得的落下長度換算成實際落下的距離。

(以 1/8 秒為例) (在螢幕上測的 7.35 公分為實際的 80 公分)

$$\frac{80\text{cm}}{7.35\text{cm}} = \frac{\text{實際距離}}{\text{螢幕上長度}}$$

(一) 一號球

$$\frac{80}{7.35} = \frac{x}{8.60} \quad x \doteq 93.61\text{cm} \quad 93.6\text{cm} \div \frac{1}{8}\text{秒} \doteq 7.49\text{m/s}$$

(二) 二號球

$$\frac{80}{7.35} = \frac{x}{7.30} \quad x \doteq 79.46\text{cm} \quad 85.5\text{cm} \div \frac{1}{8}\text{秒} \doteq 6.36\text{m/s}$$

(三) 三號球

$$\frac{80}{7.35} = \frac{x}{7.02} \quad x \doteq 76.41\text{cm} \quad 76.4\text{cm} \div \frac{1}{8}\text{秒} \doteq 6.11\text{m/s}$$

(四) 四號球

$$\frac{80}{7.35} = \frac{x}{6.60} \quad x \doteq 71.84\text{cm} \quad 75.5\text{cm} \div \frac{1}{8}\text{秒} \doteq 5.75\text{m/s}$$

(五) 五號球

$$\frac{80}{7.35} = \frac{x}{6.13} \quad x \doteq 66.72\text{cm} \quad 66.7\text{cm} \div \frac{1}{8}\text{秒} \doteq 5.34\text{m/s}$$

(六) 六號球

$$\frac{80}{7.35} = \frac{x}{5.27} \quad x \doteq 57.32\text{cm} \quad 52.2\text{cm} \div \frac{1}{8}\text{秒} \doteq 4.59\text{m/s}$$

(七) 七號球

$$\frac{80}{7.35} = \frac{x}{4.63} \quad x \doteq 50.43\text{cm} \quad 50.4\text{cm} \div \frac{1}{8}\text{秒} \doteq 4.03\text{m/s}$$

- 三、由表(四)得知大小不同半徑之保麗龍球，若由實驗數據作 V_t^2 (終端速度平方) $\propto R$ (直徑)得到圖(一)，略呈正比關係。
- 四、由表(五)得知因保麗龍球之密度並非相同，嘗試把保麗龍球之密度調為相同時，對相同密度的大小不同半徑的保麗龍球，做出其終端速度平方(V_t^2) \propto 直徑(R)得到圖(二)，可看出為正比關係，可見終端速度平方正比於密度的假設是正確的。
- 五、我們得到 $V_t^2 \propto \rho_s \cdot d$ (V_t 為終端速度， ρ_s :球體密度， d :球體直徑)
- 六、我們經由夜間拍攝可求出下雨時終端速度約為 6.3m/秒。
- 七、由證明出的 $V_t^2 \propto \rho_s \cdot d$ 可以求出當保麗龍球(密度 0.030g/cm³)的直徑為 0.457cm 時之終端速度為 1.688m/s。(已知 1ml 之水有 20 滴水滴可算出每滴水之直徑為 0.457cm)
- 八、因為 $V_t^2 \propto \rho_s \cdot d$ 我們可求出雨滴(直徑為 0.457cm 時)之終端速度為 9.7m/s。
- 九、我們同時可由夜間拍攝實驗測出的雨滴終端速度 6.3m/s 推測其直徑為 0.192cm。
計算過程:

$$(9.7)^2 = k \cdot 0.457 \cdots \textcircled{1} \quad (6.3)^2 = k \cdot X \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{由}\textcircled{1}\textcircled{2} \rightarrow \frac{0.457}{X} = \left(\frac{9.7}{6.3}\right)^2 \quad x=0.192\text{cm}$$

- 十、由雨滴的落下速度-Biglobe 查知，雨滴直徑 0.16cm 時，終端速度為 6.08m/s；
雨滴直徑 0.20cm 時，終端速度為 6.80m/s；
雨滴直徑 0.40cm 時，終端速度為 9.62m/s。
這些資料和我們的實驗計算值吻合，再度證明我們的實驗完美，且 $V_t^2 \propto \rho_s \cdot d$ 的結論正確。
- 十一、我們也可算出當水球直徑為 1 μ m 時，其終端速度為 14.3cm/s；當直徑為 0.1 μ m 時，其終端速度為 4.5cm/s，就是霧的現象。
(霧為膠體溶液，其直徑在 1-1000nm 之間)(高中化學)
- 十二、假設石頭密度約為 3.0 g/cm³，我們算出當直徑為 10cm 之石頭終端速度為 78.9m/s。
- 十三、隕石成分約為 80%鐵的和 20%石頭，密度約為 6.84(g/cm³)，藉由本方程式可推知直徑 10cm 的隕石掉落時其終端速度約為 119.2m/s。
- 十四、我們計算出雨滴直徑為 0.457cm 時之終端速度為 9.7m/s，可以推算出 75kg 重之水球之終端速度為 73.5m/s，也可以推算出 75kg 重(密度為 1.07g/cm³)之人球之終端速度為 76.0m/s。
- 十五、由網路上知道 75kg 重的人不開傘的蛙式跳傘終端速度為 55m/s，75kg 重的人不開傘的曲身跳傘終端速度為 90m/s 這也和我們算出的人球終端速度為 75.6m/s 很接近。

十六、由網路查出終端速度公式為：

$$V_t = \sqrt{\frac{4gd}{3C_d} \left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right)}$$

(V_t =終端速度 g =重力加速度， d =球體直徑， C_d =阻力係數， ρ_s =球體密度， ρ =流體密度)

柒、結論：

- 一、 $V_t^2 \propto \rho_s \cdot d$ (V_t : 終端速度, ρ_s : 球體密度, d : 球體直徑)
- 二、簡單的夜間拍攝實驗即可求出當時雨滴之終端速度為約為 6.3m/s, 且計算出當時雨滴的直徑為 0.192cm。
- 三、我們也可算出當水球直徑為 $1 \mu\text{m}$ 時, 其終端速度為 14.3cm/s; 當直徑為 $0.1 \mu\text{m}$ 時, 其終端速度為 4.5cm/s, 就是霧的現象。
(霧為膠體溶液, 其直徑在 1-1000nm 之間) (高中化學)
- 四、假設石頭密度約為 3.0 g/cm^3 , 則直徑為 10cm 之石頭終端速度為 78.9m/s。
- 五、隕石成分約為 80%鐵的和 20%石頭, 密度約為 $6.84(\text{g/cm}^3)$, 藉由本方程式可推知直徑 10cm 的隕石掉落時其終端速度約為 119.2m/s。

捌、參考資料來源：

- 一、南一書局 國民中學 自然與生活科技 (三上) 1-5 自由落體
- 二、<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%B5%82%E7%AB%AF%E9%80%9F%E5%BA%A6>
- 三、<http://www5b.biglobe.ne.jp/~saturn/meteorology/04.htm>
- 四、高中選修化學(上) 南一書局