嘉義縣第五十四屆中小學科學展覽會作品說明書

科別： 數學科

組別： 國中組

作品名稱：

走出鬼腳圖

摘要

鬼腳圖，又稱畫鬼腳，在日本稱作阿彌陀籤（あみだくじ），是一種遊戲，也是一種簡易決策方法，常被拿作抽籤或者決定分配組合。

正因為鬼腳圖的起點與終點為一一映射的關係，每個抽籤的項目只有一個人會抽到，而且每個抽籤的項目都一定會被抽到。所以當幾個人要抽籤決定一件事如何分配時，可以畫鬼腳圖決定。

本研究試圖瞭解「鬼腳圖」之奧妙，也就是驗證「鬼腳圖」具有以下三個特性：1、公平性；2 唯一性、；3、奇偶性。公平性，則表示根據「鬼腳圖」的規則，無法操縱其結果。唯一性，意即「鬼腳圖」中，每個人所獲得的結果不相同。奇偶性，則是指相同結果而不同法之「鬼腳圖」，其不同走法之橫線總數均為奇數或均為偶數。為了驗證本研究之目的，我們採用已知的數學概念進行探討，結果發現「鬼腳圖」的確具有上述的三個特性。

研究動機

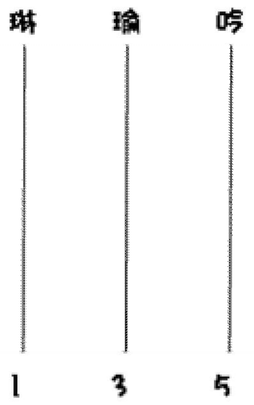
小時候在過年時，爸媽總會用「鬼腳圖」來分糖吃，而能拿到多少糖，並非只靠運氣，腦筋也需要夠靈光。

如圖(一），拿出一張紙，畫出 3 條直線，在直線頂端填上自己的名字，直線底端則填入糖果的數量，如圖(二)，讓參與的人在相鄰兩條直線中隨機增加水平橫線，直到橫線量足夠，便開始遊戲。從起點開始，沿著直線遇到橫線即轉彎，循此規矩得知每個人所選擇之直線結果。

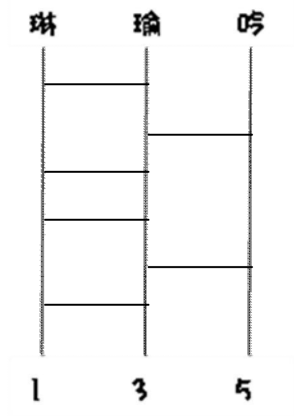
「鬼腳圖」之中暗藏的玄機，童年時期的我們都想要解開，只因想拿到更多的糖，但鬼腳圖真有著規律嗎？我們能控制它嗎？如此的疑問在心中埋下了伏筆。

在這些簡單的線段裡，摻雜著不規律的線條，每一條線都可能影響到整個鬼腳圖的結果，假使能熟知這些線條即將引領我們至哪個終點，便可依照自己的期

待來畫線或選擇，也可如願的獲得自己期待的結果。



圖(一)



圖(二)

研究目的

一、瞭解「鬼腳圖」有公平性，即為一對一的原因。

二、瞭解「鬼腳圖」有唯一性，每個人結果對應皆不相同。

三、瞭解「鬼腳圖」有奇偶性，即結果相同而走法不同之「鬼腳圖」的橫線總數必定都為奇數或都為偶數。

研究方法

一、　首先尋找研究主題「鬼腳圖」。

二、　根據研究主題「鬼腳圖」，蒐集相關文獻並提出疑問。

三、　針對疑問以及觀察發現，提出上述之研究目的。

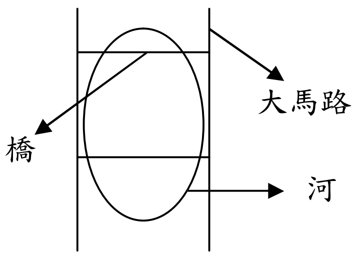
四、　藉由已知數學概念驗證研究目的。

五、整理研究結果，揭開「鬼腳圖」之奧妙。

研究過程及結果

鬼腳圖是一種遊戲，常被拿來當作抽籤的方式。遊戲的玩法為：首先畫幾條縱線，以縱線的頂端為起點，底端為終點，終點處寫上抽籤的項目。然後在縱線間任意畫一些橫線，但每條橫線不得穿越縱線。最後每個人選一個起點開始往下走，若遇到橫線則沿著橫線走到隔壁的縱線，最後到達終點就是抽籤所抽中的項目。利用代數及排列組合的方法，來分析鬼腳圖的各種性質，並且檢驗是否為一種公正的抽籤方式。

為便於溝通我們三人採用分頭進行的方式，在討論時，將縱線稱為「大馬路」，將橫線稱為「橋」，將縱線與縱線之間稱為「河」，如下圖 。

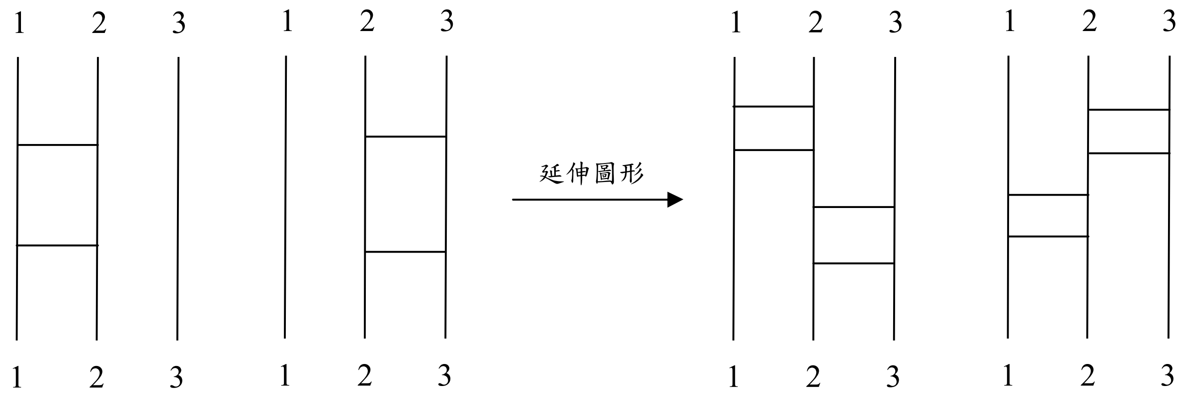


首先 3 位組員各自畫出三條馬路之鬼腳圖，再集中各組員的圖形加以統整，找出同結果、不同形式之鬼腳圖，進而探討其有何規律，三條馬路之鬼腳圖共有六種結果，而蒐集到各組員畫出的鬼腳圖，數量卻遠超過六種。依照相同結果的圖形，首先找出了關於橋墩奇偶數的問題：同一種結果的圖形，橋墩數必為奇數或偶數。接著依照結果來繪製圖形，在繪製的過程中，發現圖形由所謂「基本圖」與「原始圖」組成，因此，繪製的過程更為得心應手。只要了解基本圖與原始圖，便容易繪製出同結果不同形式之鬼腳圖。因知道同種結果之各種圖形，橋墩數必全為奇數或偶數，因此，挑出某結果的其中一個圖形，在兩條相鄰馬路間，連續增加偶數條橋墩(奇+偶=奇，偶+偶=偶，加上偶數條橋墩，奇偶數不改變），其結果與未增加前的圖形相同，而我們嘗試將偶數條橋墩增加在原圖形的上方、下方、原橋墩之間，發現增加在上方、下方都不影響圖形，也可在上、下方都增加，

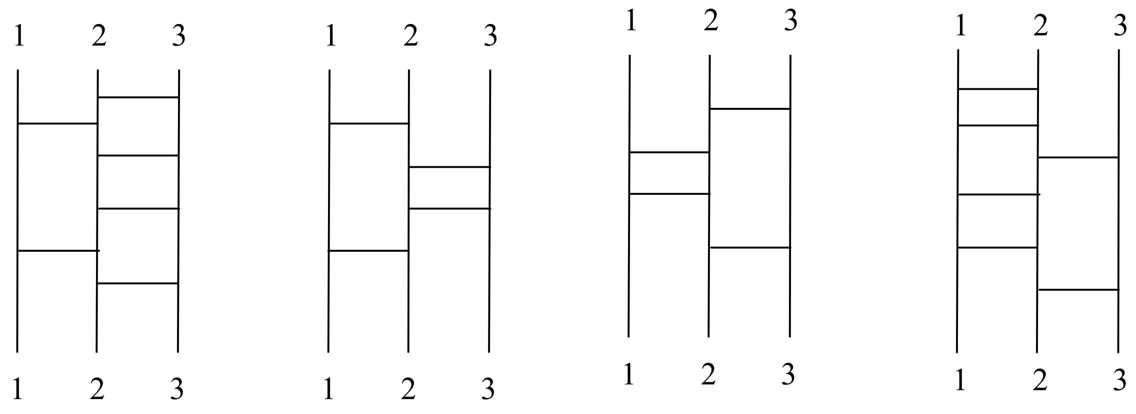
但增加在原橋墩之間，其結果可能改變，也可能不改變，經過觀察，發現改變的原因是：原橋墩的排列方式已被破壞，但若增加的橋墩不破壞排列方式，結果便不改變。

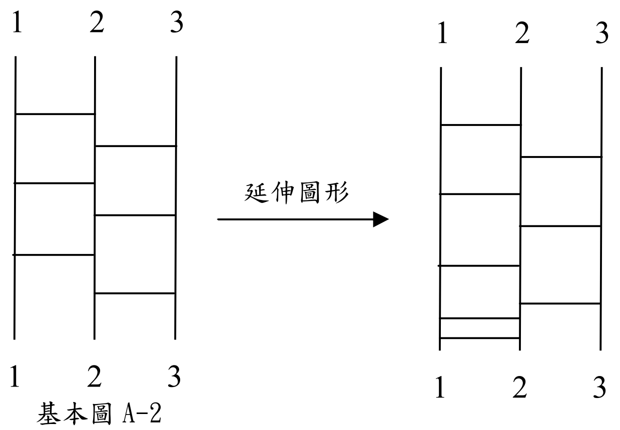
先以三條馬路，任意加上橋數，討論所有可能結果，整理後，發現了 6 種不同結果的對應方式，分別標示結果 A～F，如下列。而每種結果中，出現了基本圖形。

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 結果 A： 1→1，2→2，3→3



基本圖 A-1



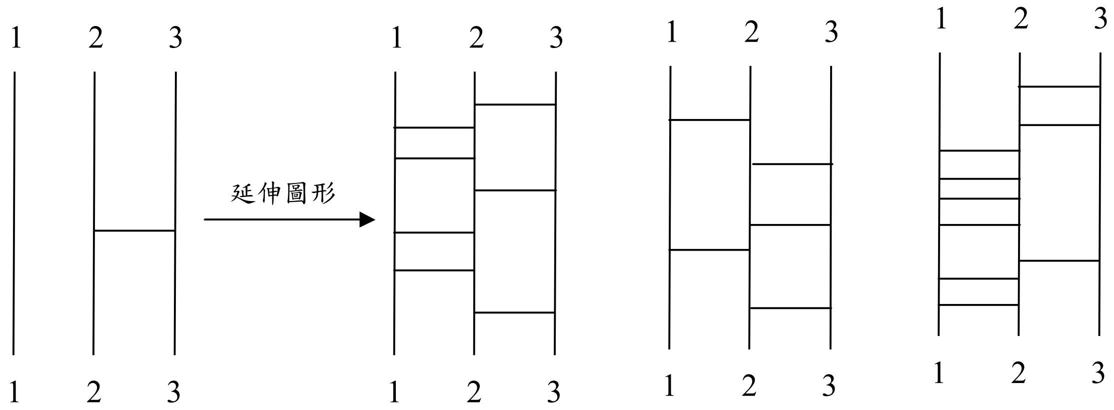


基本圖 A-2

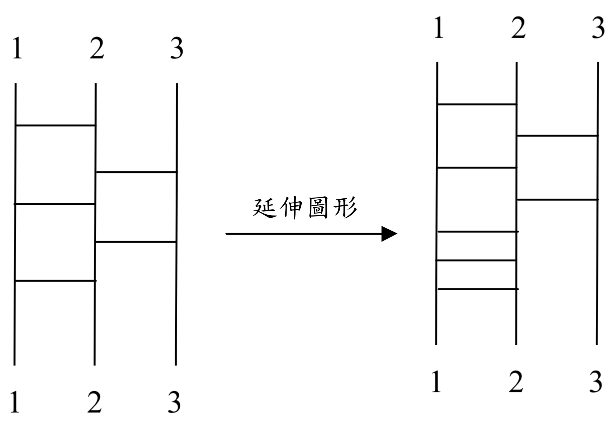
2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

結果 B： 1→1，2→3，3→2



基本圖 B-1

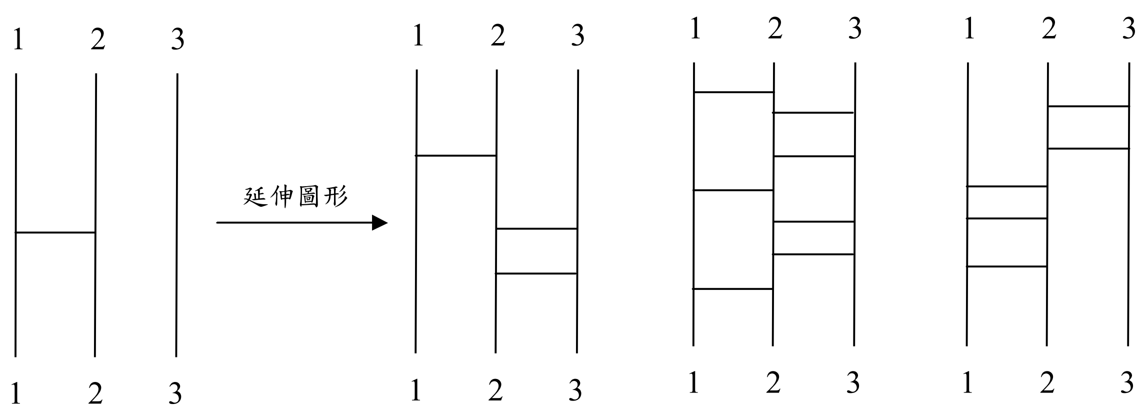


基本圖 B-2

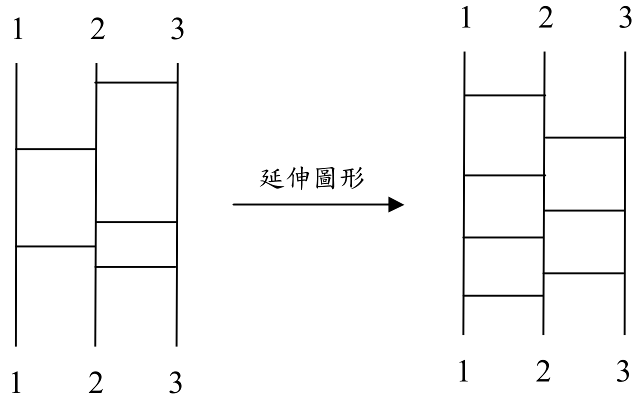
3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

結果 C： 1→2，2→1，3→3



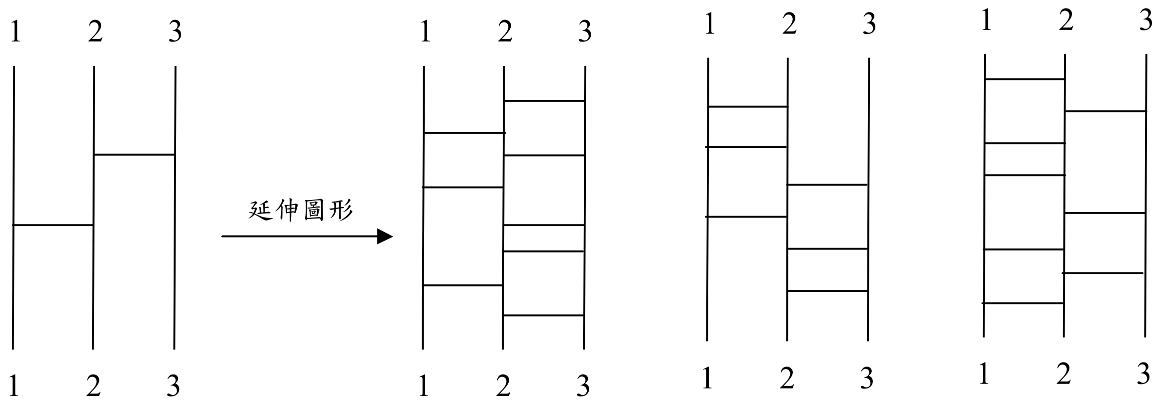
基本圖 C-1



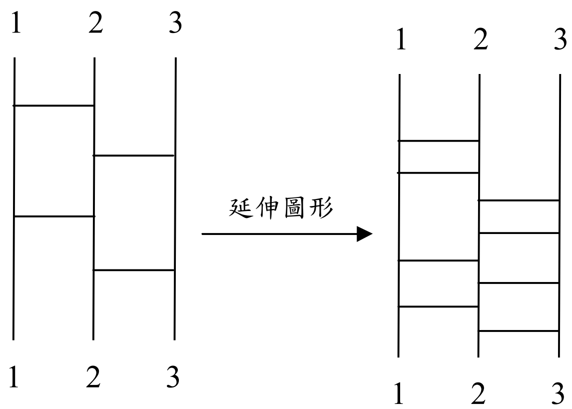
基本圖 C-2

4.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 結果 D： 1→2，2→3，3→1



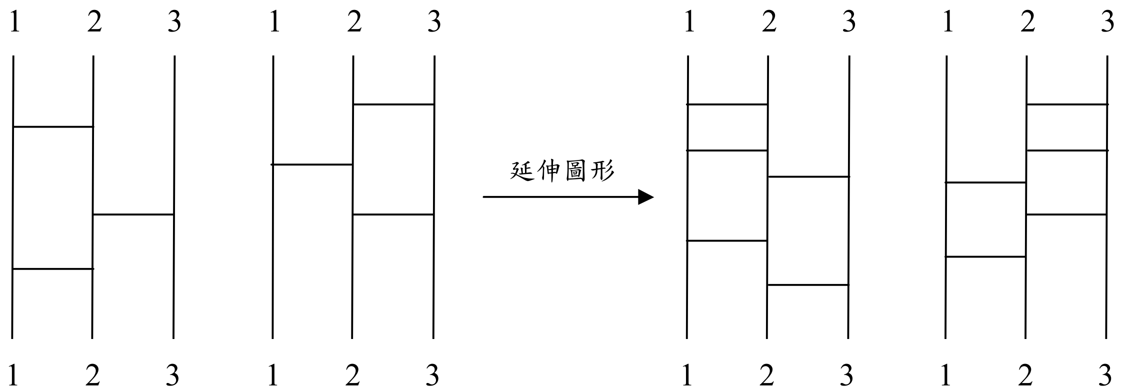
基本圖 D-1



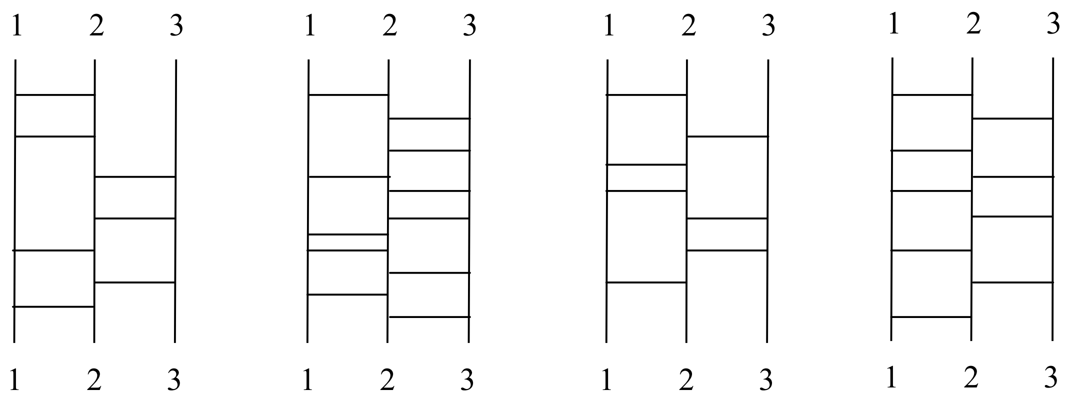
基本圖 D-2

5.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 結果 E： 1→3，2→2，3→1

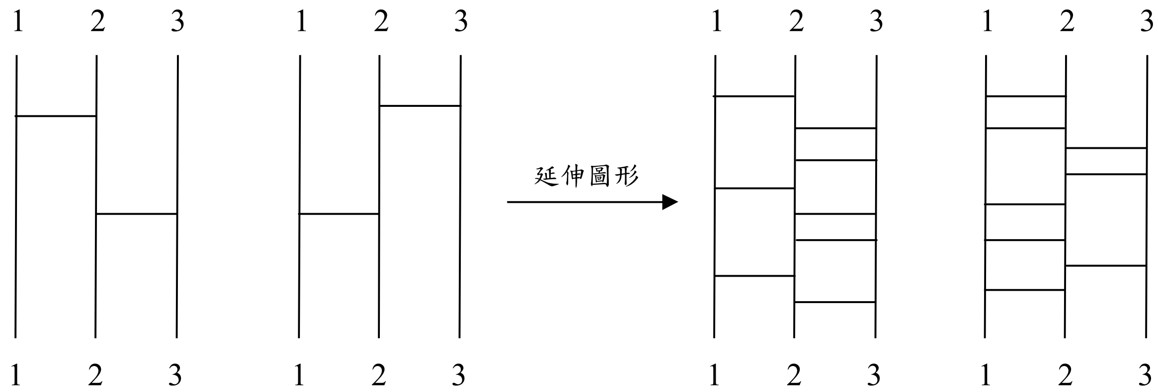


基本圖 E-1

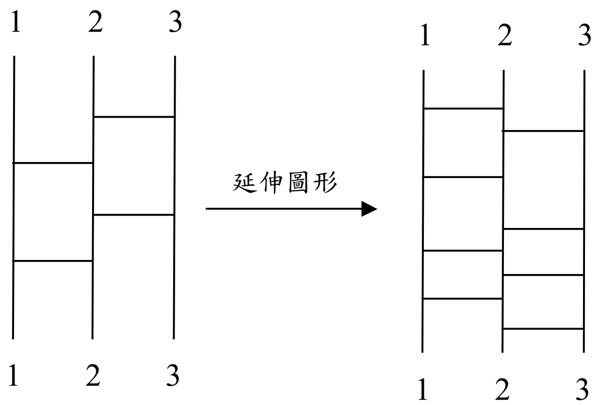


6.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 結果 F： 1→3，2→1，3→2



基本圖 F-1



基本圖 F-1

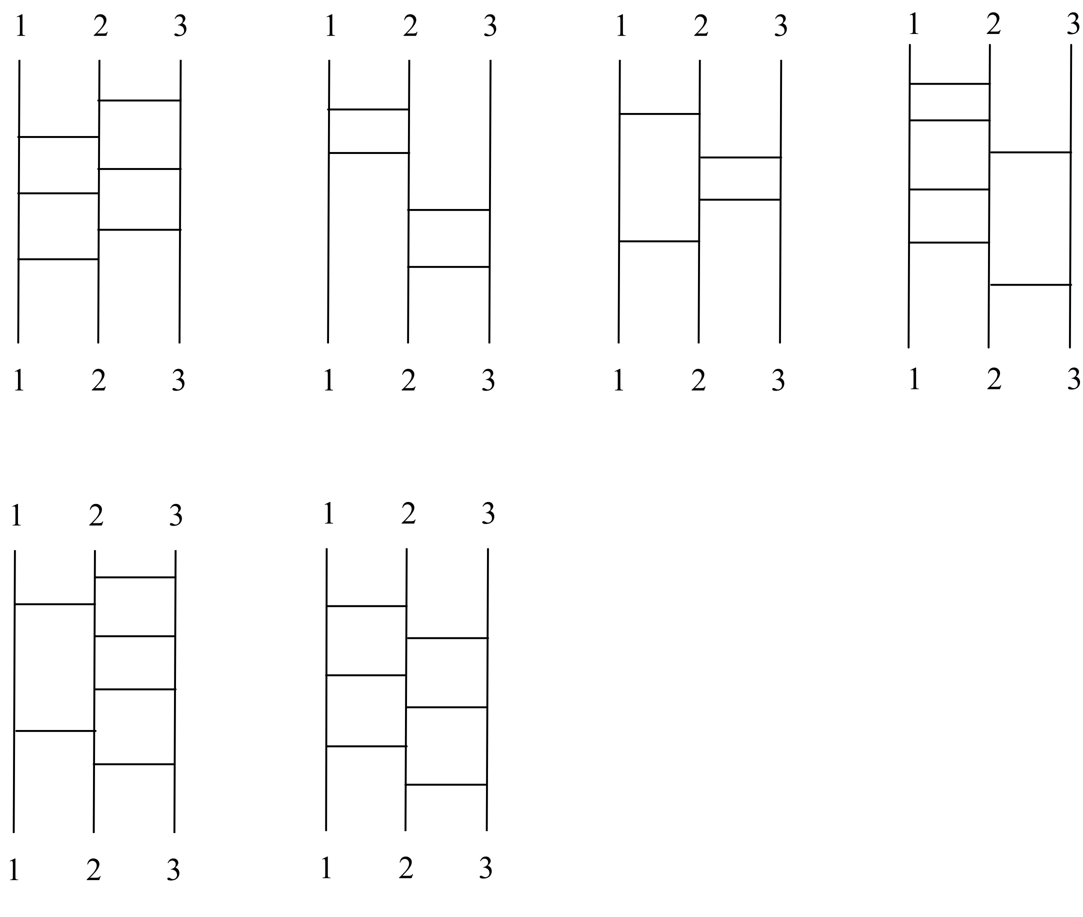
我們發現：

1. 同一種結果的橋墩數必全是偶數或奇數

2. 以基本圖為基礎，在相鄰兩條馬路肩加上偶數條橋墩，延伸圖形結果會與原先圖形的對應關係相同。偶數條可分別加在基本圖上下，也可全部排列在基本圖上方或下方，但不可以破壞基本圖結構。

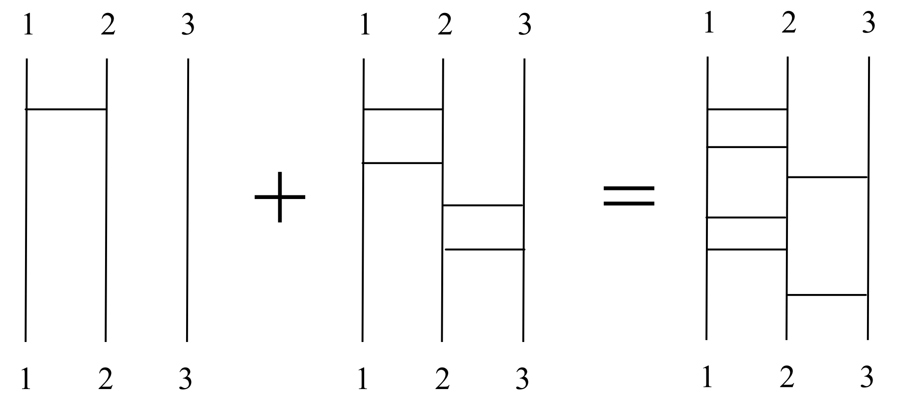
3. 破壞再生:如果橋墩排列在基本圖之間因而破壞基本圖結構，但排列後仍會形成原先基本圖，所以結果仍會相同。

4.



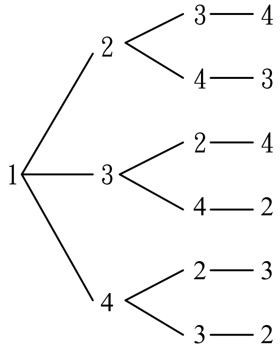
將以上六種結果A中畫出的圖形稱為「原始圖」，把原始圖和結果B的基本圖連結，形成新圖形後的對應關係仍與結果B相同。此方式亦可套用在結果C.D.E.F上。

Ex:



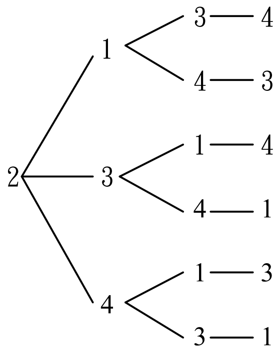
也就是說有了原始圖和基本圖的概念,也許我們是可以操控鬼腳圖最後結果。

三條馬路的對應結果為 6（3×2×1）種，利用統計樹狀圖推斷四條馬路時，所有對應結果應該為 4×3×2×1＝24 種。以樹狀圖表示結果順序：



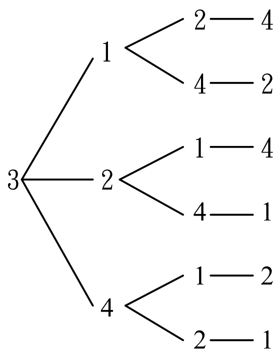
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$$



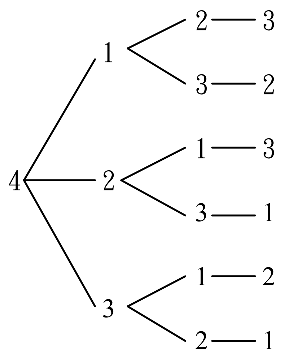
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$$

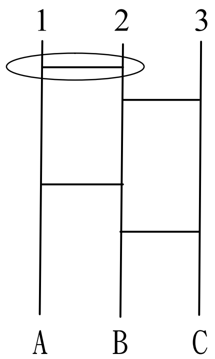
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$

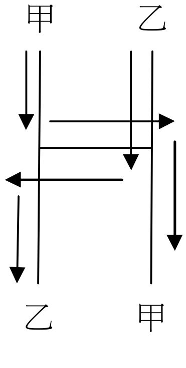
我們根據上述整理結果和玩「鬼腳圖」的經驗思考，進行「鬼腳圖」的遊戲時，沿著所選擇的直線只要遇到一條橫線必定會轉彎，也就表示遇到一條橫線後，會有一個人向左轉，而有另一人向右轉，如下圖，當 1、2 遇到圖中的那條橫線時，1 會向右轉，而 2 會向左轉，1、2 兩個人的位置會彼此交換，因此，每一個人走到的位置必定是不同的，也就不會有兩個人以上得到相同的結果，故目的一得證，「鬼腳圖」具有唯一性。「鬼腳圖」可視為一對一函數的運用。



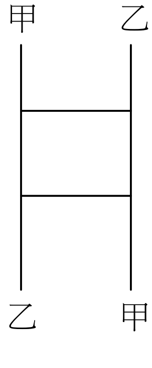
根據「鬼腳圖」的遊戲規則，影響「鬼腳圖」公平性，也就是影響結果有以下三個因素，分別為 1、結果位置的設定；2、參與者選擇位置；3、直線中所畫橫線之位置與數量。

我們從討論中可得知在「鬼腳圖」中要獲得同樣的結果，而其走法並不只有唯一一種方法，不同的走法，卻可能獲得相同的結果，於是我們認為結果相同而不同的走法間應該有共同的特性。以兩人進行「鬼腳圖」可發現，兩直線間的一條橫線可使兩個人的位置交換，如下圖。

然而若「鬼腳圖」中兩直線間為兩條橫線，其中有一條橫線時，兩人交換一次，那麼有兩條橫線時，則交換兩次，意即兩人沒有交換。



$\begin{pmatrix}甲 & 乙\\ 甲 & 乙\end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix}甲 & 乙\\ 乙 & 甲\end{pmatrix}$

若是三個人以上進行「鬼腳圖」則獲得相同結果但不同走法間又有何特性呢？我們認為「鬼腳圖」有奇偶性的特性，也就是「鬼腳圖」中結果相同而走法不同的橫線總數必定都為奇數或都為偶數，意即結果相同的各種走法，其橫線總數均為奇數或均為偶數，例如其中一種走法之橫線總數為奇數，則能夠獲得相同結果但不同走法的橫線總數必為奇數，反之亦然，若其中一種走法之橫線總數為偶數，則其他能夠獲得相同結果而不同的走法，其橫線總數也必定為偶數。

結論

透過探討本研究之目的，發現「鬼腳圖」具有三個特性，分別為：1、公平性；2 唯一性、；3、奇偶性。所謂的公平性是根據「鬼腳圖」的規則，沒有人能掌控影響「鬼腳圖」結果的三個因素(1、結果位置的設定；2、參與者選擇位置；3、直線中所畫橫線之位置與數量)，除非事先知道結果位置以及參與者所選擇的起始位置，才可以透過畫橫線的過程來達到預期的結果，否則若遵守「鬼腳圖」的遊戲規則，是無法操縱「鬼腳圖」使參與者獲得預期的結果，因此可得知「鬼腳圖」具有公平性的特性。而唯一性，便是目的二所探討的，「鬼腳圖」中不會出現兩個以上的人走到相同結果的情形，若將人看成一個集合，結果視為另一個集合，則兩集合間的函數關係為一對一，因此證明「鬼腳圖」的確具有唯一性。而最後，奇偶性則由討論中發現結果相同的「鬼腳圖」，其走法不只一種，透過我們已知的數學概念驗證，得知在「鬼腳圖」中，結果相同而不同走法的橫線總數會呈現均為奇數或均為偶數的特性，因此可得證，認為「鬼腳圖」具有奇偶性的特性。

根據上述所提，回顧本研究之目的，便可瞭解「鬼腳圖」具有 1 公平性、；2、唯一性；3、奇偶性。透過「鬼腳圖」這三個特性，我們觀察生活中的實例，

發現有許多生活實例均運用到「鬼腳圖」的三個特性，或許這些實例並不是完全採用「鬼腳圖」的型式出現，但其中卻蘊含著「鬼腳圖」的特性，例如動機所提及的分派打掃工作，或是體育課的分組或配對，甚至於連一些機智問答的遊戲都與「鬼腳圖」的特性相當相似。

最後，由於涉獵「鬼腳圖」的書籍相當少，所以我們較著重於「鬼腳圖」特性的探討，以達到本研究之目的。故此，本研究較少討論到「鬼腳圖」與其他數學遊戲或生活實例間的關聯，同時也較未探討到如何變化「鬼腳圖」的遊戲方式，使「鬼腳圖」遊戲更為多元，針對這個缺憾，我們認為將是未來更進一步探討「鬼腳圖」可深入的方向。

參考文獻暨相關教材

歐迪興。鬼腳圖的分析

趙文敏(民國 82 年)。寓數學於遊戲第一輯。九章出版社。

國民中學數學課本第三冊。變數與函數。

國民中學數學課本第六冊。統計與機率。