擺動的秘密

蔡嘉信　蔡依蓁
蕭筠汝

指導老師:鄭懋學、蔡旭宮

一、研究動機：

平常學生在下課的時候，學校同學都會去盪鞦韆。在偶然的機會下，問老師一個問題「老師，鞦韆在什麼情況下會盪的比較快?」此時、由於受限於他們所知的知識，只好輕描淡寫的解釋而已。之後和學生參觀過本校上屆參加科展作品。忽然腦中浮現了有關於盪鞦韆的物理實驗，今年的科展便和學生們一起研究有關於虎克定律和盪鞦韆的的簡諧運動小弧度單擺運動，並且將實驗數據和相關理論相印證一番。

二、研究目的：

本次的單擺運動實驗的控制變因如下：

1、擺錘的形狀和質料。

2、擺線的質料。（幾乎趨近於無重狀態）

3、擺動的弧度。（幾乎趨近於零度）

4、擺線固定於支架上擺動的摩擦力。（可當作光滑無摩擦力的支架上）

本次的單擺運動實驗的操縱變因如下：

1、　擺線的長度。

2、　擺錘的質量。

本次的單擺運動實驗的應變變因如下：

1、在第一段實驗中，讓除了擺線長度以外的變因固定後，來實驗不同長度的擺長下，其產生的實際十次平均週期(註一)數目。

2、在第二段實驗中，讓除了擺錘重量以外的變因固定後，來實驗不同重量的擺錘下，其產生的實際十次平均週期(註一)數目。

本次的單擺運動實驗的目的如下：

1、 擺線的長度對擺動的快慢有什麼影響？

2、 擺錘的質量對擺動的快慢有什麼影響？

(註一):週期即是單擺擺動來回一次的時間。

(註二):

三、實驗設備：

本次實驗中所用的的器材有：

1、 五種不同長度的綿線 16 公分、25 公分、36 公分、49 公分、64 公分長各一條。

2、 三種不同重量的砝碼 5 克、10 克、15 克重各一個。

3、 計時器（碼錶一個）。

4、 實驗用支架一組。

四、實驗過程：

本實驗可分成兩個階段，先以擺線的長度爲操縱變因，其他變因(如:擺錘的質量，擺線的資料，擺動的弧度，擺線固定架上擺動的摩擦力)

皆固定下來爲控制變因(上所述的控制變因後三者如研究目的中所述的如此控制)，作爲第一段實驗，第二段實驗爲將擺錘的質量當作爲操縱變因，則其他的變因如第一段實驗中控制變因加以控制。

第一段實驗:

操縱變因:擺線長度(有 16、25、36、49、64 公分等五種長度)。

控制變因:擺錘的質量(皆以十公克爲準)，擺線的質料(皆以趨近於無重狀態的綿線)，擺動的弧度(一定要趨近於零度)，光滑無摩擦力的支架。

應變變因:來回一次擺動的週期。

步驟:

1. 先拿最短(16cm)，無重狀態的棉線一端固定在光滑的支加上，一端綁著 10 公克的擺錘，使擺錘自然下垂。
2. 由一位同學拿著擺錘，使擺錘和自然下垂的位置偏離一小段距離。然後，另一位同學開始準備計時，當拿著擺錘的同學一開始將擺錘放開時，拿著計時器的同學開始啓動計時器計時。
3. 當擺錘被放開時，擺錘便會來回擺動，當擺錘擺動十次時(來回算一次)，將計時器終止計時時間。
4. 將所得的時間除以十，求得十次的平均時間，將其計算出來的結果紀錄在表格上。

5. 以相同 10 克的擺錘，分別換上 25cm，36cm，49cm，64cm 擺線重複上面的步驟，各自測量出十次擺動的時間，並分別除以十來求得十次的平均時間，也紀錄在表格上。

第二段實驗:

操縱變因:擺錘的重量(有 5，10，15 公克三種)

控制變因:擺線的長度(皆以 25cm 爲準)，擺線的資料(皆以趨近於無重狀態的棉線)，擺動的弧度(一定要趨近於零度)，光滑的支架。

應變變因:來回一次擺動的週期。

步驟:

1. 拿最輕(5 克)的擺錘綁在 25cm 無重的棉線上，棉線的一端固定在光滑的支架上，使擺錘自然下垂。
2. 如第一段實驗步驟一般，開始實驗。將所得的結果也除以十，求得十次的平均時間，紀錄在另一表格上。
3. 分別順序換上 10 公克，15 公克的擺錘，重複第一階段的實驗步驟，將所得的結果也除以十，求得十次的平均時間，也紀錄在另一表格上。

五、實驗結果：

在第一階段的實驗後，可將實驗結果記錄成表格如下:

擺線的長	16	25	36	49	64

度(cm)					
10 次的平均時間(秒)	8.11	9.85	11.50	13.27	15.39

而第二階段的實驗結果也可以記錄成表格如下:

擺錘質量(gw)	5	10	15
10 次的平均時間	9.75	9.85	9.81

六、結論：

在擺長幾乎無重狀態下，擺動角度幾乎趨近於零度，擺線和之架固定處幾乎無摩擦力、每一條不同長度擺線質料一致、每一個不同重量的砝碼的材質一樣這些條件下，綜合二個實驗所得的表格可知：

1、單擺的擺線愈長，單擺的擺動週期愈長。

2、單擺的擺質量對單擺週期的影響似乎不大,幾乎可視爲沒有影響。。

3、 由本次的實驗可見鞦韆雖然其鐵鍊的部分不算輕，是屬於複擺的一種，比單擺更加複雜，但是，其原理應可相通，所以我們小朋友的體重較重的同學和體重較輕的同學，兩者一起盪鞦韆時，若是兩者盪的最高點一樣高，而兩座鞦韆的長度也一樣長時，則兩個人擺動的速度一樣快。

4、 承上所述，若是不論其中的一人往鞦韆的踏板施較大的力，則其鞦韆擺蕩的最高點應會提高，則擺動的角度會有所變化，但

是，這並不在本次實驗的實驗範圍內，本次實驗只是限定於鞦韆是幾乎趨近於 0 度的小擺動的情況下。

5、 若是其中的一位同學是以站姿盪鞦韆而另一位同學是以坐姿盪鞦韆的話，則會影響整個鞦韆的重心的位置，但是一般說起來，影響不大，所以坐姿或是站姿這個因素可不必太加以考慮。

6、 根據本次的實驗結果，還有另外一個發現，如果我們把鞦韆看成是一種單擺的話，那麼，鞦韆其鐵鍊部分則是單擺的擺長，其木板加上我無論是我們坐上去或者是站上去再木板上的重量皆可看成單擺擺錘的質量，所以，單擺擺長愈長就好像鞦韆的鐵鍊部分愈長，則鞦韆的擺動的速度會愈慢，其擺動一次所花費時間也愈久。

7、 由此可見，我們日常生活周遭一些會遇到一些需要有單擺的器具，例如，舊式的大鐘，其下面應該會接一個單擺，以方便計時，但是有時候時鐘會有時候走的太快或者是走的太慢，我們皆可根據單擺的原理，將時鐘做稍微的調整，如果時鐘走的太快我們可以將擺長調長些，讓它稍微慢下來些，而時鐘走太慢的話，則相反行之。

七、內容深究：

在上述的實驗結果，我們可知道擺長長度愈長，週期愈大(當然要限制在結論所提及的必要條件下)；在高中物理中所提及的單擺小弧度的擺動公式，而由公式中也可以知道擺錘質量大小與週期無關。此實驗結果與理論之間，兩者可相印證。現稍加說明小弧度的擺動公式如下:

線將單擺擺動的力圖，分析如右圖:

AD 爲地心對擺錘的重心 mg，因爲 AD＝AC+CD，

所以 AD 可分爲 AC 和 AD 這兩個互相垂直完全不

互相取代的分力，而沿著 AC 方向的分力可完全由

天花板所提供沿著擺線方向的力量所抵消，所以地

心對擺錘之重力只剩下由 AD 沿著 CD 方向的分力

此 CD 方向之分力量值爲 CD＝AD× ，而 ＝

，所以 CD＝AD× ＝mg× 當 趨近於 0 度時，AB 幾乎等於 AB，事實上擺錘沿著 AB 上擺動，但因爲如前所述。AB 幾乎等於 AB，所以可將擺錘當做在 AB 上的來回移動，而垂直擺線直線方向的分力 CD 也可當做沿著 AB 直線上，因爲 CD＝mg× ，又 m、g、l 皆爲固定值，所以可將 視爲一個常數 K，於是 CD＝mg× ＝kx 爲沿著 AB 線上對擺錘所施力，即符合虎克定律，而虎克定律所形成的運動，即爲簡諧運動。而簡諧運動中，力與週期之關係爲 F＝m （F 爲

簡諧運動中的力，T 爲簡諧運動中的週期，m 爲簡諧運動中質點的質量）又因爲 CD 即爲 F，所以 kx＝mg×　＝CD＝F＝m　　，簡化之則爲　　＝m　　，所以 T＝4　×　，T＝2　×　，故可得知。

接下來，要說明的是爲什麼虎克定律所形成的運動即是簡諧運動，首先要了解什麼是簡諧運動，簡諧運動即是做等速率圓周運動中的質點 a 投影在 x 軸上的 b 點，此 b 點在 x 軸上的運動狀態即爲簡諧運動，此 b 點在距離 o 點時爲 x 距離時的瞬時間所受的力量爲質點 a 的切線速率（v）和所需的向心力（F）在 x 軸上的投影，如右圖：

根據上述 b 點沿著 x 軸的瞬時速率和瞬間所受的力量應分別爲　×v 和 F×　，當　（r 爲等速率圓周運動中的半徑）

質點 a 沿著圓周作等速率圓周運動移動到 d 點位置時，其在 x 軸上的投影點也由 b 點直線移動到 o 點位置時，其沿著 x 軸的瞬間速率應爲 v 瞬間所受之力應爲零，依照力學能守恆定律投影點在 o 點位置上時的動能會等於在 b 點時的動能加上由 b 到 c 間質點所受之力所作之功，如果要簡諧運動中，投影點的瞬時速率和瞬間所受之力，此二者之設定正確的話，必須符合前所提及力學能守恆定律，因爲 F＝　×m v＝　（等速率圓周運動的向心力和切線速率之公式，F 爲等速率圓周運動中所需之向心力，m 爲等速率圓周運動中質點的質量，r 爲等

速率圓周運動的半徑，T 爲等速率圓周運動之週期，v 爲等速率圓周運動之速率），所以 b 點時的動能加上 b 至 c 點時質點所受之力所作之功＝ ×m× ＋m × dy＝ ×m× ×v＋m ×dy

＝ ×m× ＋m× × y ＝ ×m× ＋ ×m× （x－0）

＝ ×m× ＋ ×m× ＝ ×m× ＋ ×m× × ＝

×m× ＋ ×mxv× ＝ ×m× ＝ ×m×v

投影點在 o 點位置時的動能，故簡諧運動中，投影點的瞬時速率和所受之力設定是正確的，而設定中 b 點所受之力爲 F× ，又因爲 F、r 皆爲一定值，所以 可當成一定值 k，則 b 點所受之立即爲 kx，與和 o 點的距離長度成正比，故符合虎克定律，所以由虎克定律所形成的運動即爲簡諧運動。

接下來，要介紹的是圓周運動的公式，爲什麼圓周運動在等速率下的向心加速度會爲 a＝ （R 爲圓周運動的半徑，a 爲圓周運動加速度，其先決條件爲在等速率圓周運動的狀態下）；要計算一個等速率圓周運動的向心加速度時先要求出一個等速率圓周運動的切線速率，其切線速率的求法很簡單，首先要了解一個物體會做等速率圓周運動的成因，我先解釋一個，物體會做等速率圓周運動的原因；原本一個以等速率向前行進做直線運動的物體，若它有受到外力的影響，其原本向前行進的方向會因爲此外力的影響下而改變其運動的方

向，如容後再形敘述其如何的改變狀況，當此原本朝一個方向的直進的物體受到瞬時改變的力量時，當此力量與直進方向爲垂直時，依照上所述要改變其運動方向，當此外力一直與此物體直線進行的方向爲垂直時，會產生一個特別的現象，那就是此一個物體會不斷的轉向，最後終於回到原來最初的起點，其經過的軌跡會形成一個圓，但是有一個更特殊的地方，那就是一般的物體受到外力的作用時，其原本的運動方向不但會轉向，並且其物體受外力的作用下會增加其動能，即其速率會加快，但是，此種圓周運動中的外力，因爲它一直保持和物體行進的方向垂直，所以此外力只能改變此物體的運動方向，並且不斷的轉向，而無法讓此直線運動中的物體其直線運動的速率加快，但是，此種圓周運動中的外力，因爲它一直保持和物體行進的方向垂直，所以此外力只能改變此物體的運動方向，並且不斷的轉向，而無法讓此直線運動中的物體其直線運動的速率加快，即增加此物體的動能，換句話說，此力只能用來改變此直線等速率運動的方向，但此力有一個定數，其値和此直線運動中的物體的質量，物體的直線運動的速率有關係，此會影響到物體在繞圓時其繞出來的圓的半徑，其關係式如下：

F= m a = m　　(其中F 爲等速率圓周運動中的外力，m 爲此物體的質量，v 爲直線運動的等速率運動，R 爲等速率圓周運動的半徑)，有關

於爲什麼 F= m a，容後再述；在上述的公式中 R 即爲此圓周運動的半徑，也是此原本直線行進的等速率物體所繞行的圓的圓周半徑，而 v 因爲從頭到尾沒有改變其行進的速率，所以可以用圓周的周長除以其繞行一個圓所需要的時間來求得，即是除以週期；而此 v 爲物體繞著此圓周打轉的直線速率，爲什麼說此爲直線運動呢？因爲若是沒有垂直此速率方向的外力拉著它時，它會一直不斷的向前衝去，這也容後再述，所以此 v 可稱爲切線速度，因爲此速度的方向爲圓周的切線方向；而公式中的 F，由於其方向爲向著圓周運動的圓心，所以此 F 力也可稱爲向心力，而公式中的 a 可稱爲向心加速率，依照實驗和公式的結果我們可知，一個物體如果以一定的速率向前行進時，若是此時有一個垂直其直線行進的外力存在時，其外力如果愈大時，其物體所繞行的圓周運動的半徑則愈小，而外力愈小，則相反之，其繞行的圓則愈大，即其圓周運動的半徑則愈大，所以，由此可知垂直直線運動方向的力量即爲原先此直線運動方向的物體做圓周運動的原因，但是，此物體要做圓周運動的條件爲此物體的質量必須保持不變，而此物體直線行進的速率也需保持一定，而其向心力必須與物體直線前進的方向垂直，無論何時何刻，此時在這種狀況下，向心力的大小，即是決定圓周運動圓的半徑大小之一的因素，現在將圓周運動的各種運動狀態和向心力的方向繪製於如圖下：

右圖中 F 即爲向心力，v 爲等速率圓周運動的切線速率，其中 F 和 v 互相垂直，現在接下來要說明的是圓周運動中切線直線運動的速率是如何計算出來的，其實很簡單，前頭有敘述過，一個圓的圓周除以其物體繞此圓所需要的時間即爲此物體在圓周上做等速率圓周運動的速率，前者又提，假設此直線行進中的物體若是沒有垂直物體前進方向的向心力拉著時，此物體會按原本前進的方向繼續前進，所以其物體切線方向直線形進的速率應該就是此物體在此圓上繞圓行進的圓周的等速率運動，即爲

= v，r 爲本圓周運動的半徑，T 爲圓周運動的週期，即是繞一圈所需要的時間，v 則爲切線的速率，所以 2 r 爲圓周的周長除以繞一周所需的時間即爲，其圓周運動切線速率，接下來，要介紹的是如何求出一個圓的向心加速度，如前我們已經求出一個物體的切線加速度，當物體做圓周運動時，其速率 v 則爲 ，而向心加速度所提供的向心力則是用來改變速率的方向，而不影響其物體做圓周運動時切線速度的大小，其切線速度與向心力所形成的向心加速度的關係爲如右圖所示：

由右圖可知 v −v = △ v ，v 和 v 則是代表物體做圓周運動時，

在圓周上 A、B 點時的瞬時切線速率，而△v 則是該物在圓周上 A、B 點時，所擁有的速度差，這裡所需要用到的數學是向量的加減法，在數學上來講，向量所代表的意義是有一定的方向和量值，只要方向不變和量值不變，向量可以平移，無論它的起點在哪裡，而在力學來講，力也有這種性質，好比我們推一輛車，無論我們從車子的什麼部位推或是拉，只要力的方向沒有改變和大小也沒變的話，這個力量對車子所造成的影響不會有變化，都會使車子做同效果的移動，力量的起始的位置只對車子的轉動求力矩有關，而移動的方面則無關，所以在 B 點時的瞬時切線速率 v 可平移至 A 點上，而此做圓周運動的物體原本即由 A 沿著圓周而至 B，所以當此物在 A 點時即有其切線速率 v，所以 A 點和 B 點的速率變化即為△v = v －v ，而△v 就是 A 點和 B 點時的速率差，由於此物體不斷地在此圓上做圓周運動，所以一直有一個無論在什麼時候都垂直切線速率的向心力存在，此力使得物體不斷的轉圈，而圖中 A 點和 B 點的切線速率應該相等的，因為此物在做等速率圓周運動，故 v 值 = v 值，而△v 即是向心力所作用出來改變物體切線速度，而△v 如何求出呢？首先，要了解的是 A 和 B 是非常接近的，所以

△v 非常接近指向圓心 O，因爲物體的切線速度時常在變，所以 A 和 B 必須要非常接近，才能求出瞬時速度的變化，假設∠AOB = 　時，則 v 和 v 的夾角亦爲 　，可由幾何的圖形看出，所以△v = v －v = v × 　，因爲 A 點和 B 點非常的接近，所以， 　可當作非常的小，小到可以讓 v 和 v 幾乎快要重疊，在這個情況下， 　角非常小的緣故，所以 v 和 v 間的直線距離△v 幾乎等於以 v 和 v 的交點 A 爲圓心，v 和 v 爲半徑，v 和 v 之間的弧線(指端點處)，所以△v 可看成 v × 　或 v × 　，依照速度和加速度的定義，我們可以知道

△v = a ×△t，其中 a 即爲向心加速率，△t 爲 A 和 B 點所經過的時間，所以 v × 　= △v = a × △t，a = v × 　= v × 　，因爲 　即爲平均每秒物體所通過的弧線，所以 a = v × 　，而前面曾經提及，等速率圓周運動的切線速率爲 　，(r 爲圓周運動半徑，T 爲週期)，故

a = v × 　= 　× 　= 　，即爲此圓周運動的向心加速率，而關於向心力則根據牛頓第二運動定律可知，F = m a = m 　，故 m 　即爲此圓之向心力。

八、參考資料：高中物理。