

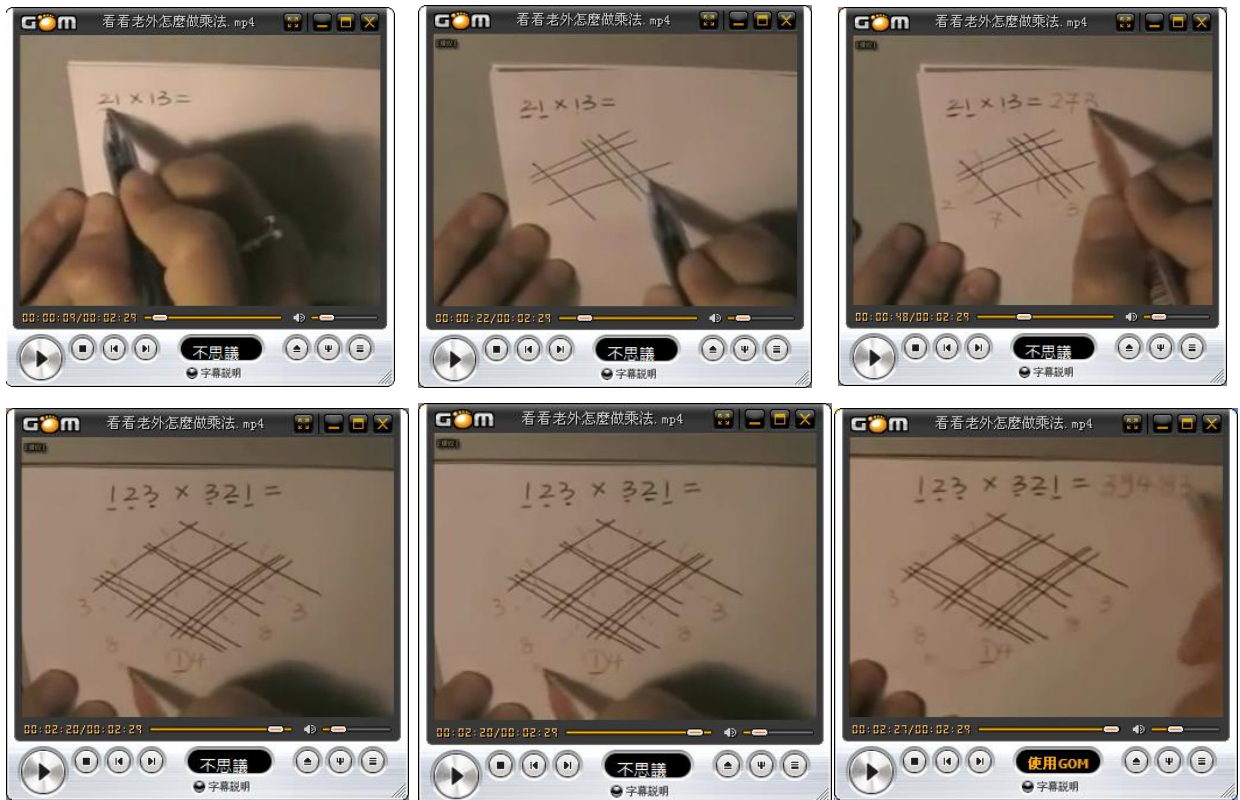
線條交織出的乘積

摘要：

透過線條交叉點的數算，以直觀而且具體的圖像表現出數字的乘積。並將這個方法延伸至多位數、多個數的乘法。最後用在表示多項式的乘積，更有明顯的成效。

壹、研究動機：

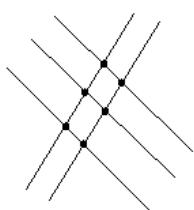
自國小背會了九九乘法表之後，多位數的乘法已習慣性地使用直式乘法。但在網路上卻發現有不少快速得知多位數乘積的影片。其中，在「老外作乘法」的影片中(如下圖)，更發現只用數交叉點的方式，即可輕易知道多位數相乘的乘積。於是興起更進一步研究的想法。



貳、研究過程：

一、「老外作乘法」的影片乍看之下，覺得頗為神奇。於是我們便細思它與一般直式乘法有何異同？首先當我們以直式作 $2 \times 3 = 6$ 時，一般是直接由九九乘法表中背出。而以線條表示(如下左圖)，可以直接數出 2 個 3 為 6。其次，在影片中以線條表示 $21 \times 13 = 273$ 的方法其實是利用乘法的分配律 $21 \times 13 = (20+1) \times (10+3) = 20 \times 10 + 20 \times 3 + 1 \times 10 + 1 \times 3$ ，這與直式的乘法(見下右圖)實有異曲同工之妙。最後，三位數與三位數相乘時，即影片中 $123 \times 321 = 39483$ ，也是利用分配律把 $123 = 100 + 20 + 3$ 分別以 1 條、2 條、3 條直線代替百位數、十位數與個位數。另一方面 $321 = 300 + 20 + 1$ 則分別以 3 條、2 條、1 條直線代替百位數、十位數與個位數，再相互交錯「乘」出積來。

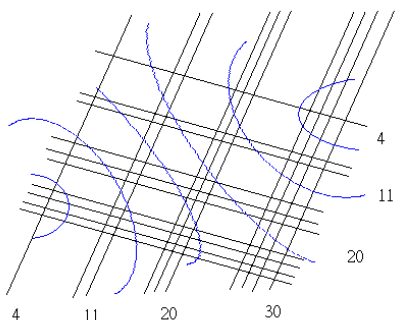
$$2 \times 3 = 6$$



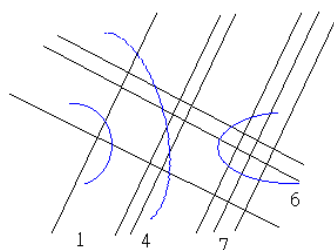
$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 13 \\ \hline 63 \\ 21 \\ \hline 273 \end{array}$$

二、接著我們仿照其法，以四位數乘四位數(1234×4321)如下左圖所示，一樣可以用線條表示出其乘積，但隨著數字變多變大，交叉點越來越多，而且有進位的問題，數算時越來越不方便。最後我們更試著以不同位數的兩相乘(123×12)如下右圖所示，也可得到正確的乘積。至此我們可以大膽預測不論幾位數的兩數相乘，皆可以線條交織而成的圖形「數」出乘積。

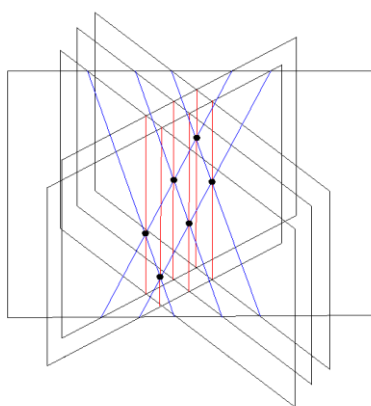
$$1234 \times 4321 = 5332114$$



$$123 \times 12 = 1476$$



三、更進一步地，我們希望能以圖形畫出三個數相乘的結果。實際操作後發現不如想像中簡單，要三個圖形皆互相交叉的情形已不再是單單線條所能呈現。最後我們參考了高中的數學教材，以平面互相交錯而成，並試畫出了一個 $1 \times 2 \times 3 = 6$ 的圖形如下。

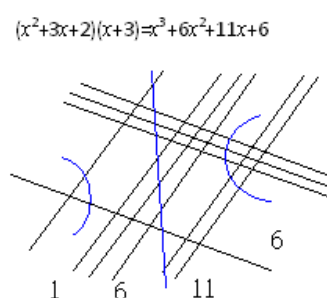
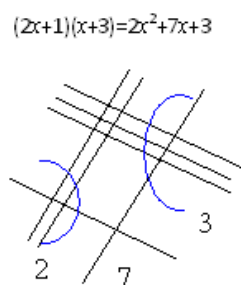


雖然據此，我們可以畫出多位數的三數連乘積，但一來圖形複雜難繪，再者已達不到原先以圖形簡單數算出乘積的初衷。

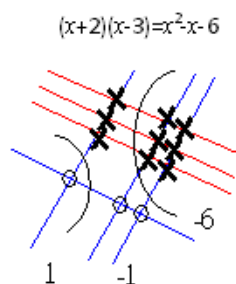
至於四個數連乘、五個數連乘或更多個數連乘恐怕已不是三度空間的這個世界所能畫得出。

四、在國中數學第三冊裡，我們學會了多項式的乘法。在兩多項式相乘時也是利用分配律乘開各項，再合併同類項而得最後的乘積。試著用線條交錯來求：例如，當兩一

次多項式 $(2x+1)(x+3)=2x^2+7x+3$ 其圖形如下右圖。又 $(x^2+3x+2)(x+3)=x^3+6x^2+11x+6$ 其圖形如下左圖。



五、在多項式的乘法中，各項係數有正有負，根據同號數相乘為正，異號數相乘為負的特性，我們把線條顏色分為以藍色、紅色分別代表正負號，每當同色線條交叉時表示乘積為正，不同色線條交叉時表示乘積為負。例如 $(x+2)(x-3)=x^2-x-6$ 可用下圖表示。



參、研究結果：

以線條交錯出兩數相乘的積，不但具體而且不用算，只要數一數即可得到正確乘積。對於九九乘法表尚未背熟者有輔助的功能。而且更能直觀又清晰地認識乘法分配律的作用。缺點則是三個或三個以上的數連乘，以圖示較為麻煩，甚至無法畫出。又數字較大時，如 $9 \times 8 = 72$ ，得要數很久，而且易數錯，反而不便。至於多項式相乘的情形，因為不用考慮進位的情形，使用上比數字的乘法更方便。

下一個研究的目標則是希望能用類似的圖解法，具體有效地描繪出高中數學向量的內積與外積。

肆、參考資料：

- 一、網際網路 youtube 影片
- 二、國中數學課本第三冊
- 三、高中數學教材